本日やること

1. 複素数
   - 定義
   - 複素数の相等・演算
   - n 次方程式の解
   - 複素平面
   - 極形式
   - 回し伸ばしの原理

複素数

定義

複素数の定義

$$i^2 = -1$$

をみたす i を虚数単位とよぶ.

$$x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

の形の数を複素数とよぶ.

複素数 $z = x + iy$ に対して

$\mathbf{Re}(z) = x$: 複素数 z の実部 (real part),
$\mathbf{Im}(z) = y$: 複素数 z の虚部 (imaginary part)

と定める.

複素数

相等・演算

複素数の相等

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ のとき

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

とくに

$$x_1 + iy_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 = 0$$

複素数
相等・演算

複素数の演算

複素数の四則演算は文字 i を含む式と同様の規則で行い, i^2 が現われたらこれを -1 で置き換えることにする.

[例] $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -1+i$ とするとき

$$z_1 + z_2 = (2+3i) + (-1+i) = 2-1+3i+i = 1+4i$$

$$z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+i) = 2+1+3i-i = 3+2i$$

$$z_1\, z_2 = (2+3i)(-1+i) = -2+2i-3i+3i^2 = -5-i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{-1+i} = \frac{(2+3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$

$$= \frac{-2-2i-3i-3i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

複素数

相等・演算

複素数 z_1, z_2 に対して

$$z_1 z_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = 0 \text{ または } z_1 = 0$$

複素数

復習：2 次方程式

[複素数のつかいみち（その 1）：代数方程式を解くこと]

復習：二次方程式の解の公式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a,\ b,\ c \text{ は実数の定数} \quad a \neq 0)$$

の解は判別式 $D = b^2 - 4ac$ を用いて

(i) $D > 0$ のとき $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ 異なる 2 実数解

(ii) $D = 0$ のとき $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$ 重解

(iii) $D < 0$ のとき $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{-D}i}{2a}$ 異なる 2 複素数解

複素数

代数学基本定理

これをさらに進めて

代数学基本定理

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ を複素数の定数とするとき, n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

は (重複も含めて)n 個の複素数の解を持つ．また, その解を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ として

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

のように因数分解できる.

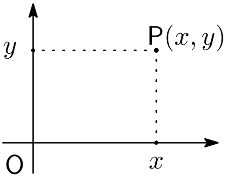
じつはもう一つ存在意義がある。

複素数

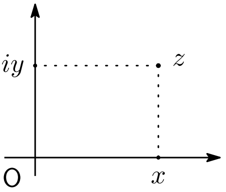
複素平面

[複素数のつかいみち（その 2）: 回転・振動の表現]

座標平面と複素平面



[座標平面]
平面の各点 P に 2 つの実数の組 (x, y) を対応させたもの.
(x, y) を P の直角座標という.



[複素平面]
直角座標 (x, y) の点 P に複素数

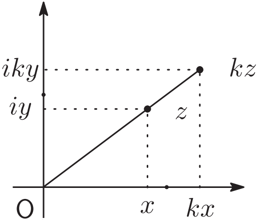
$$z = x + iy$$

を対応させたもの.
横の座標軸を実軸, 縦の座標軸を虚軸と呼ぶ.

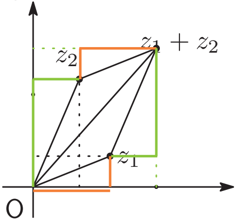
複素数

複素平面上の実数倍と和

[複素平面上の実数倍と和]



正の実数倍： $k > 0$ のとき rz は z を偏角を変えないで絶対値を k 倍したもの。$k < 0$ のときは向きを反対にして絶対値を $|k|$ 倍したもの。



和： $z_1 + z_2$ は図のような平行四辺形の対角線が表す複素数。

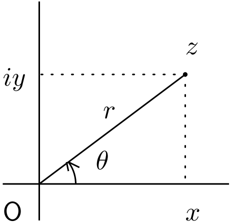
$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$$
$$\Rightarrow\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

平面のベクトルと同じ考え方。

複素数

極形式

複素数の極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して

$r =$ 点 z と原点 O の距離,

$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される. これを複素数 z の極形式という.

$r = |z|$: z の絶対値,

$\theta = \arg z$: z の偏角

という

複素数

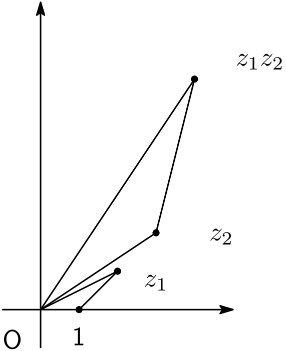
極形式と実部虚部の関係

極形式と実部虚部の関係

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

複素数

積と極形式の関係



$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 3 + 2i$ とするとき

$$z_1z_2 = (2 + i)(3 + 2i) = 4 + 7i$$

となるがここで

O, 1, z_1 の作る三角形と

O, z_2, z_1z_2 の作る三角形

は相似である。

[問] このことを確かめよ。

実はこのことは任意の複素数 z_1, z_2 について成り立つ！以下確かめる。

複素数

回し伸ばしの原理

回し伸ばしの原理

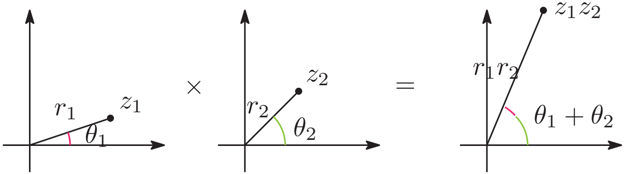
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

(i) $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$, $\qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$, $\qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

によって決まる．これを回し伸ばしの原理という。

(i) は

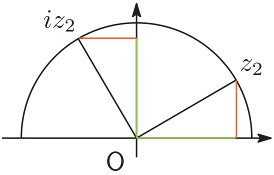


ということ

複素数

回し伸ばしの原理

[(i) の確かめ] $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とする.



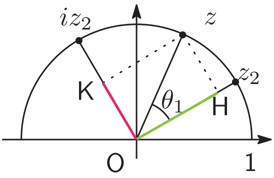
(Step 1) $z_1 = i$ の場合.

$$z_2 = x_2 + iy_2 \quad \Rightarrow \quad iz_2 = -y_2 + ix_2$$

だから iz_2 は z_2 を左周りに角 $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもの.

複素数

回し伸ばしの原理



(Step 2) $|z_2| = 1$, $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ の場合.

z : z_2 を角 θ_1 回転したもの.

とし,

H : $(\cos\theta_1)z_2$

K : $(\sin\theta_1)(iz_2)$

とすると $\sin\theta_1$, $\cos\theta_1$ の定義より OH $\perp$ Hz, OK $\perp$ Kz だから OHzK は長方形となるので

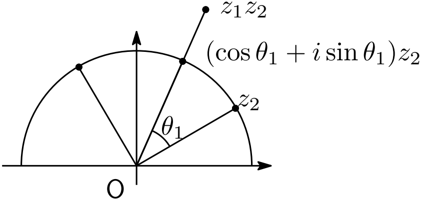
$$z = (\cos\theta_1)z_2 + (\sin\theta_1)(iz_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2 = z_1 z_2$$

まとめて

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ は z_2 を 角 θ_1 だけ回転したもの.

$|z_2| \neq 1$ のときも同様にできる。

複素数
回し伸ばしの原理



(Step 3) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ の場合.

$z_1 z_2$ は $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ と

偏角が同じで

絶対値を r_1 倍したもの

だから結局 (i) がわかった.