

本日やること

1 指数関数

- 指数関数の定義
- グラフ
- 性質

2 対数関数

- 対数の定義
- 対数の性質
- 対数関数の定義

指数関数

定義

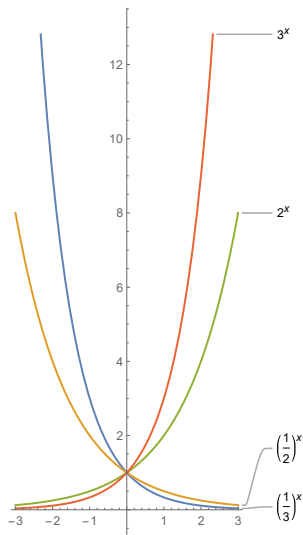
指数関数の定義

$a > 0, a \neq 1$ とする. 実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を, a を底とする x の指数関数とよぶ.

定義域は実数全体である.

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \dots$ は激しく増加する。

実数べき 2^x は等比数列 2^n , ($n = 1, 2, \dots$) を拡張したものであるから, x が増加すると同様に激しく増加する。

$\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, (\frac{1}{2})^3, \dots$ は非常にはやく 0 に近づく。

実数べき $(\frac{1}{2})^x$ は等比数列 $(\frac{1}{2})^n$, ($n = 1, 2, \dots$) を拡張したものであるから, x が増加すると同様に非常にはやく 0 に近づく。

指数関数

性質

定理 2.1. 指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 \mathbb{R} , 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である. また,

(i) $1 < a$ のとき **狭義単調増加**,

(ii) $0 < a < 1$ のとき **狭義単調減少**.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

ただし, 関数 $f(x)$ が

狭義単調増加であるとは $t < s \Rightarrow f(t) < f(s)$ であること。

狭義単調減少であるとは $t < s \Rightarrow f(t) > f(s)$ であること。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a > 0, a \neq 1$ を満たす定数とする。このとき、正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する。この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し、 a を底とする M の対数という。また、 M を真数と呼ぶ。つまり

$$p = \log_a M \iff a^p = M \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

である。 $\log_a M$ はログ底 a の M と読む。

対数関数

対数の定義

特に

$$a^{\log_a M} = M$$

$$\log_a a^p = p$$

$$\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$$

注意すること

底の条件： $a > 0, a \neq 1$

真数条件： $M > 0$

対数関数

例

[例]

$\log_2 \sqrt{32}$ を求める.

$\log_2 \sqrt{32} = p$ とおくと 定義より

$$\Leftrightarrow 2^p = \sqrt{32}$$

ところで $\sqrt{32} = (2^5)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$ だから指数を比較して

$$p = \frac{5}{2}$$

対数関数

対数の性質

対数の性質

$a, b : 1$ でない正の数, $M > 0, N > 0, k, x, p$ を実数とするとき

$$(i) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$(ii) \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(iii) \log_a (M^k) = k \log_a M$$

$$(iv) \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad (\text{底の変換公式})$$

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

対数関数

対数の性質

[(i) の確かめ]

$$\begin{array}{lll}
 \log_a M = t \text{ とおく} & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \iff \end{array} & a^t = M \\
 \log_a N = s \text{ とおく} & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \iff \end{array} & a^s = N \\
 & \text{かけ合わせて} & a^t a^s = MN \\
 & \text{指数法則より} & \parallel \\
 \log_a MN = t + s & \begin{array}{l} \text{定義より} \\ \iff \end{array} & a^{t+s} \\
 & \parallel & \\
 & \log_a M + \log_a N &
 \end{array}$$

対数関数

対数の性質

[(iv) の確かめ]

$$\begin{array}{ccc} \log_a b = t & \log_b c = s & \text{とおく} \\ \text{定義より} & \Downarrow & \Downarrow \\ & a^t = b & b^s = c \end{array}$$

指数法則より

$$\begin{array}{ccc} a^{ts} = & (a^t)^s = b^s = c & \\ \text{定義より} & \Downarrow & \\ \text{(iv)} \iff & \log_a c = ts = \log_a b \log_b c & \end{array}$$

対数関数

例

[例]

$X = \log_a x$, $Y = \log_a y$, $Z = \log_a z$ とおくと

$$\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z = X + Y + Z$$

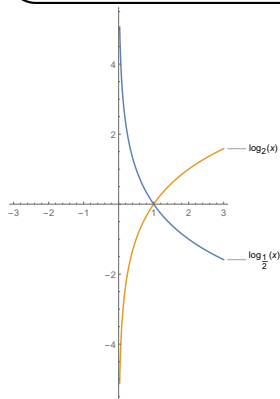
$$\begin{aligned}\log_a \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{z^3}} &= \log_a(x^{\frac{1}{2}}yz^{-\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a x + \log_a y - \frac{3}{2}\log_a z \\ &= \frac{1}{2}X + Y - \frac{3}{2}Z\end{aligned}$$

指数関数

定義

対数関数の定義

$a > 0, a \neq 1$ とする. 関数 $f(x) = \log_a x$ を, a を底とする x の対数関数とよぶ.



定義域は 正の実数全体 $(0, \infty)$, 値域は 実数全体 \mathbb{R} である. また,

- (i) $1 < a$ のとき **狭義単調増加**,
- (ii) $0 < a < 1$ のとき **狭義単調減少**.

指数関数の逆関数である。