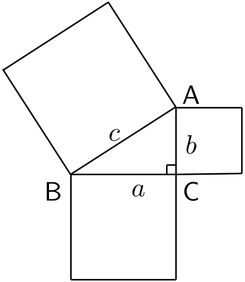
本日やること

1. 三角比
   - 三平方の定理
   - 三角比
2. 三角関数
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 三角関数の定義

直角三角形・三平方の定理

三平方の定理



直角三角形 ABC において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

すべての古代文明で知られていた，極めて重要な定理です。

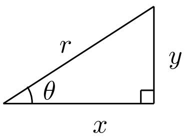
証明はウェブ上にたくさんあります。たとえば

https://www.youtube.com/watch?v=wn3GwS4YCb0

三角比

定義 (鋭角の場合)

三角比の定義 (鋭角の場合)



角 θ が鋭角の場合, 図のような直角三角形を用いて

θ の正弦を $\quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}$

θ の余弦を $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

θ の正接を $\quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

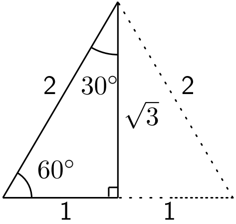
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角比

特別な角の三角比

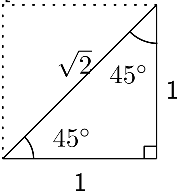
[正三角形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{対辺})^2 = 2^2 - 1^2 = 3$



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

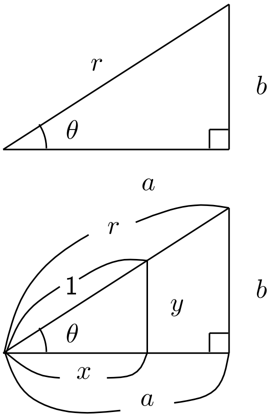
[正方形を半分にしたもの]　三平方の定理により $(\text{斜辺})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$



$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \tan 45^\circ = 1$$

三角比

定義 (一般の角の場合)



直角三角形を r が 1 になるように相似変形して底辺が x, 対辺が y となったすると

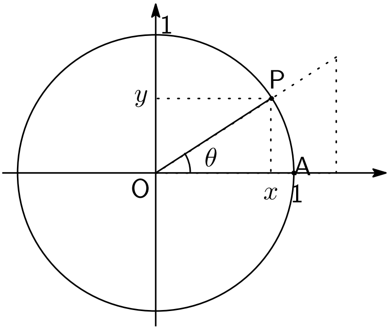
$$\cos\theta = \frac{a}{r} = x, \quad \sin\theta = \frac{b}{r} = y$$

だからこれを利用して三角比の定義を拡張する。

三角比

定義 (一般の角の場合)

三角比の定義 (一般の角の場合)



原点中心の単位円周上で

$\mathrm{A}(1,0) \quad \mathrm{P}(x,y) \quad \angle\mathrm{AOP} = \theta$

とするとき

$$\sin\theta = y$$

$$\cos\theta = x$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

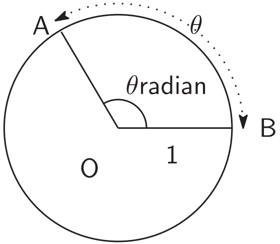
と定める。

三角形を相似に拡大 (縮小) してもこの値は変わらず, θ のみによって決まる。

三角関数

弧度法

弧度法の定義



θ radian (ラジアン)
　= 半径 1 の円周の，長さ θ の円弧に対する
　　中心角の大きさ

このような角の大きさのはかり方を**弧度法**という．
普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると，

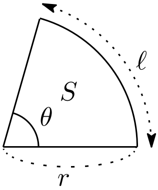
1 回転 $= 360°$，半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$

だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360°, \quad \pi \text{ (rad)} = 180°, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90°, \cdots$$

三角関数

弧度法の性質



·

半径 r 中心角 θ(rad) の扇形 において

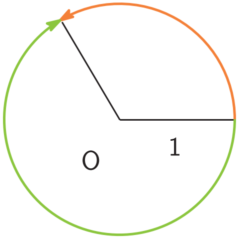
弧の長さ：$\ell = r\theta$

面積：$S = \pi r^2 \times \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 \theta = \dfrac{1}{2} r\ell$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

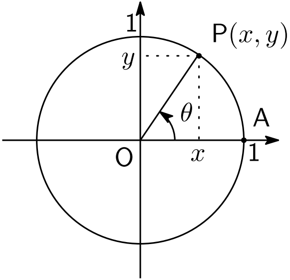
であること．ただし

正の向きの回転 : 左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転 : 右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という．