本日やること

1. 「割合」と乗法・除法
2. 不等式
   - $<$ の性質
   - 区間
   - 1 次不等式
   - 2 次不等式

割合

わり算とかけ算に現れる量は性質の異なるものである。

$$\text{はやさ} = \frac{\text{みちのり}}{\text{じかん}}, \qquad \text{みちのり} = \text{はやさ} \times \text{じかん},$$

$$\text{(平均の) 速度} = \frac{\text{座標の変化量}}{\text{時間}}, \qquad \text{座標の変化量} = \text{(平均の) 速度} \times \text{時間},$$

一方、たし算に現れる量は同じ性質のもの。

A 地点から C 地点へのみちのり

=A 地点から B 地点へのみちのり +B 地点から C 地点へのみちのり

「割合」(わり算の結果出てくるもの) の計算には特別な規則がある。

A 地点 C 地点間の (平均の) はやさ

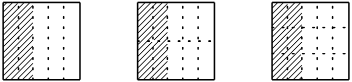
=A 地点 B 地点間のはやさ +B 地点 C 地点間のはやさ

は誤り。

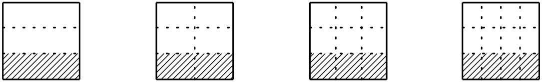
分数

[(自然数の) 分数の計算]
分母分子に 0 でない同じ数をかけても値は変わらない。

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} \quad \cdots$$



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} \quad \cdots$$



また、分母分子を 0 でない同じ数で割っても値は変わらない。これを約分という。

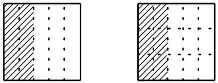
$$\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

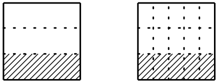
分数

通分

2 つの分数の分母を共通にすることができる。これを通分という。

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$$





分数

大小比較・たし算・ひき算

通分により２つの分数の大小比較・たし算・ひき算ができる。

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} > \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15}$$

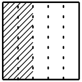
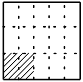
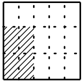
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2+1}{5+3} = \frac{3}{8} \quad \text{は誤り}$$

分数

かけ算・わり算

分数のかけ算は分母どうし, 分子どうしかける。

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 2 = \frac{2 \times 2}{5 \times 3}$$

分数のわり算は分母分子をいれかえてかける。

分数式

変数を含む分数式は、自然数の分数と同じ規則で計算しなくてはならない。まとめると

分数 (式) の計算のまとめ

(i) 分母分子に 0 でない同じ数 (や式) をかけてもわってても値は変わらない。

(ii) 二つの分数式をたす（ひく）には, 通分により分母を共通にして分子どうしをたす（ひく）。

(iii) 分数式のかけ算は分母どうし, 分子どうしかける。

(iv) 分数式のわり算は分母分子をいれかえてかける。

分数式

[例題] (1) 10% の食塩水 100(g) に含まれる食塩は何 (g) か。

$$\text{食塩水の濃度} \div 100 = \frac{\text{食塩の重量}}{\text{食塩水の体積}} \quad \text{だから}$$

$$\text{食塩の重量} = \text{食塩水の濃度} \times \text{食塩水の体積} \div 100 = 10(\mathrm{g})$$

(2) 10% の食塩水 100(g) に 2% の食塩水を加えて 4% の食塩水を作るには, 2% の食塩水を何 (g) 加えればよいか。

加える食塩水の量を x(g) とする。

$$\begin{aligned} \text{10\% の食塩水 100(g) に含まれる食塩の量} &= 10(\mathrm{g}) \\ \text{2\% の食塩水 } x\text{(g) に含まれる食塩の量} &= 0.02x(\mathrm{g}) \\ \text{あわせてできる食塩水 } 100{+}x\text{(g) に含まれる食塩の量} &= 10{+}0.02x(\mathrm{g}) \end{aligned}$$

一方これが 4%であるから

$$\frac{10 + 0.02x}{100 + x} = 0.04$$

これを解いて $x = 300(\mathrm{g})$.

不等式

"$<$" の性質

"$<$" の性質

2 つの実数 a, b があるとき $a<b$, $a=b$, $a>b$ のどれか一つが成り立ち，任意の実数 a, b, c に対して

(i) $a<b, b<c \;\Rightarrow\; a<c$

(ii) $a<b \;\Rightarrow\; a+c<b+c, a-c<b-c$

(iii) $a<b, c>0 \;\Rightarrow\; ac<bc, \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

$$a<b, c<0 \;\Rightarrow\; ac>bc, \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

「$a<b$ または $a=b$」のことを $a \leqq b$ で表す．$<$ と同様な性質を持つ。

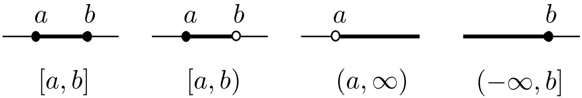
不等式

区間

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。
a, b を実数とするとき

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b\} : a \leqq x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x < b\} : a \leqq x < b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} : a < x \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$
$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqq b\} : x \leqq b \text{ を満たす実数 } x \text{ の集合}$$

のような集合を区間という.



不等式

1 次不等式

1 次不等式 $ax+b>0$ の解は, $a>0$ のとき

$$ax+b>0 \quad\Leftrightarrow\quad ax>-b \quad\Leftrightarrow\quad x>-\frac{b}{a}$$

だから $x>-\dfrac{b}{a}$. 区間で表すと $(-\frac{b}{a},\infty)$

$a<0$ のとき

$$ax+b>0 \quad\Leftrightarrow\quad ax>-b \quad\Leftrightarrow\quad x<-\frac{b}{a}$$

だから $x<-\dfrac{b}{a}$. 区間で表すと $(-\infty,-\frac{b}{a})$

不等式

2 次不等式

準備 1. 因数定理

多項式 $P(x)$ が $x-a$ で割り切れる $\iff$ $P(a)=0$

不等式
2 次不等式

準備 2. 二次方程式の解の公式

二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a,\ b,\ c \text{ は定数} \quad a \neq 0)$$

の解は

(i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき 実数解を持たない。(後で述べるが複素数解を持つ)

$b^2 - 4ac$ を判別式といい D で表す.

不等式

2 次不等式

$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とする。

2 次不等式の解

$D > 0$ のとき $ax^2 + bx + c = 0$ は二つの異なる実数解 $x = \alpha, \beta$ $(\alpha < \beta)$ を持つが, $a > 0$ のとき

(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解は $x < \alpha$ または $x > \beta$

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ の解は $\alpha < x < \beta$

$D < 0$, $a > 0$ のとき $ax^2 + bx + c = 0$ は実数解を持たないので

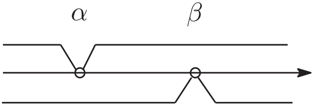
(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解はすべての実数 x

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ は解を持たない。

不等式

2 次不等式

[前半の確かめ] 因数定理により $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$



符号を調べると $a > 0$ だから

x	$x<\alpha$	α	$\alpha<x<\beta$	β	$\beta<x$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$

だから

(i) $ax^2 + bx + c > 0$ の解は $x < \alpha$ または $x > \beta$

(ii) $ax^2 + bx + c < 0$ の解は $\alpha < x < \beta$