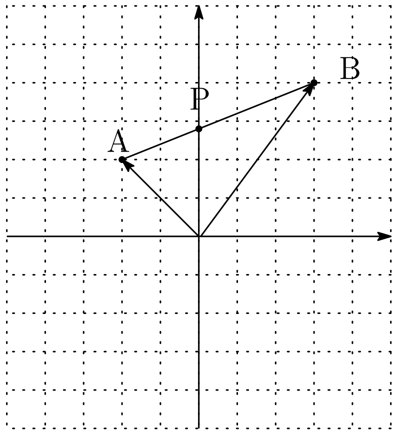
電気リメディアル数学講座 第13回問題 解答

問題 1 2点 $A(-2,2)$, $B(3,4)$ に対し AB を $2:3$ に内分する点を P とする. P の位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表し, P の座標を求め図示せよ.



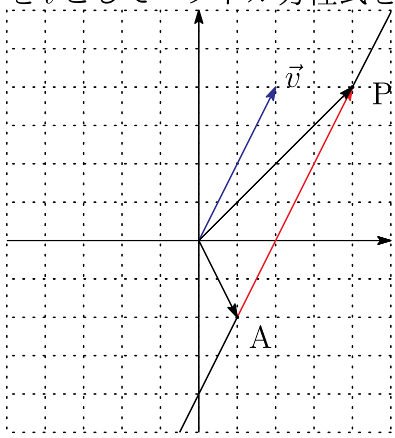
P が AB を 2:3 に内分するとき

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+3} = \frac{3}{5}(-2,2) + \frac{2}{5}(3,4)$$

$$= \left(\frac{3}{5}\times(-2) + \frac{2}{5}\times 3 \ \ , \ \ \frac{3}{5}\times 2 + \frac{2}{5}\times 4\right)$$

$$= \left(0\ ,\ \frac{14}{5}\right)$$

問題 2. (1) 点 $A(1,-2)$ を通り方向ベクトル $\vec{v} = (2,4)$ である直線を図示し, パラメータを t としてベクトル方程式を求めよ.



P を直線上の任意の点とするとき

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AP}$ と $\vec{v}$ は平行だから $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ となる実数 t がある. したがって

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$ これがベクトル方程式

(2) P の座標を (x,y) とするとき, x, y を t で表せ.

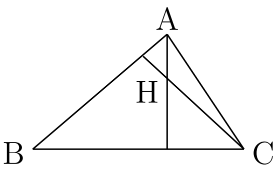
$(x, y) = (1, -2) + t(2, 4) = (1 + 2t, -2 + 4t)$
したがって

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$$

(3) (2) で求めたパラメータ表示から t を消去して x, y の方程式を導け.

$2x - y = (2 + 4t) - (-2 + 4t) = 4$
だから　$y = 2x - 4$

問題 3.



仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ である。$\overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ を示せばよい。
$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}$
より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{BH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) + \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

この点 H をこの三角形の垂心という。

問題 4.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-1, -1, -1)$
だから
$\cos \angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{1}{3}$
$\sin \angle\mathrm{BAC} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle\mathrm{BAC}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
$\triangle\mathrm{BAC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \sin \angle\mathrm{BAC} = \sqrt{2}$