電気リメディアル数学講座 第11回　解答

問題 1. (1) $z_1 = 3+i, \quad z_2 = 2+i$ とするとき, 次のものを計算せよ.

$$z_1 z_2 = (3+i)(2+i) = 6+3i+2i+i^2 = 5+5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{2+i} = \frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7-i}{4-(i)^2)} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \cdots ① \quad (= \sqrt{3^2+i^2} = \sqrt{8} \text{ は誤り})$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \cdots ②$$

$$|z_1 z_2| = |5+5i| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cdots ③$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{2}$$

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ を確かめよ.

①, ②, ③ より確かにそうなっている。

問題 2. (1) 複素数と回し伸ばしの原理を使って $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ と $\sin(\theta_1 - \theta_2)$ を $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ で表せ.

$z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$, $z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$ とおくと,

$|z_1| = |z_2| = 1$, $\arg z_1 = \theta_1$, $\arg z_2 = \theta_2$

だから回し伸ばしの原理により

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \theta_1 - \theta_2$$

したがって

$$\frac{z_1}{z_2} = 1(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

つまり

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdots (\star)$$

ところで

$$
\begin{aligned}
(\star)\text{ の左辺} &= \frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

ここで $(\star)$ の両辺の実部虚部を比較して

$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2$

$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2$

(2) $\cos(2\theta)$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表せ. (2 倍角の公式)

回し伸ばしの原理により

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

一方

左辺 $= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta$

だからこの実部を比較して

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

(3) $\cos(n\theta)$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表せ. (n 倍角の公式)

回し伸ばしの原理により

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

一方

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= ({}_nC_0\cos^n\theta - {}_nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + {}_nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots) \\
&\quad + ({}_nC_1\cos^{n-1}\theta\sin\theta - {}_nC_3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + {}_nC_5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta + \cdots)i
\end{aligned}
$$

だからこの実部を比較して

$\cos n\theta = \cos^n\theta - {}_nC_2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + {}_nC_4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots$