

本日よりこと

1 行列の対角化

- 復習：固有値・固有ベクトルの定義
- 行列の対角化の定義
- 対角化可能となる条件

固有値・固有ベクトル

復習：固有値・固有ベクトルの定義

復習：固有値・固有ベクトルの定義

正方行列 A に対し列ベクトル x , 複素数 λ が

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

となるとき

λ : A の固有値

x : 固有値 λ に対する固有ベクトル

という。

行列の対角化

行列の対角化の定義

行列の対角化の定義

n 次正方行列 A が対角化可能であるとは

P : n 次正則行列

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$: 複素数

があつて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となること。

P を対角化行列という

行列の対角化

対角化可能となる条件

対角化可能となる条件

n 次正方行列 A について次の (i), (ii) は同値である :

(i) A は正則行列 P によって対角化可能である.

(ii) A は n 個の線形独立な固有ベクトル $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ を持つ.

このとき P と $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ の間には

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{array} \right) \cdots (*)$$

の関係があり, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は固有値となる。

行列の対角化

対角化可能となる条件

[(i) \Rightarrow (ii) の確かめ]

$$(i) \Leftrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots (**)$$

ここで $\{u_1, \dots, u_n\}$ を (*) で決めると

$$(**) \text{ の左辺} = A \begin{pmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Au_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

$$\begin{aligned} (\star\star) \text{ の右辺} &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \color{green}{\mathbf{u}_1} & \color{green}{\mathbf{u}_2} & \cdots & \color{green}{\mathbf{u}_n} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} \color{green}{\lambda_1 \mathbf{u}_1} & \color{green}{\lambda_2 \mathbf{u}_2} & \cdots & \color{green}{\lambda_n \mathbf{u}_n} \end{array} \right) \end{aligned}$$

両辺を比較して $\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{A}\mathbf{u}_n = \lambda_n\mathbf{u}_n$ だから $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ は固有ベクトル。

さらに P が正則であることにより $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ は線形独立。

行列の対角化

対角化可能となる条件

[(i) \Leftarrow (ii) の確かめ] : (i) \Rightarrow (ii) の確かめを逆に追っていけばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

[例題 6]

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し、可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & -3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2(-2 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

を解いて固有値は $\lambda = 1$ (2重解), -2 .

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

これは明らかに

$$x_1 \text{ は任意, } x_2 + x_3 = 0$$

と同値だから解は

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c_1, c_2 \text{ は } 0 \text{ でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-2) $\lambda = -2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 \text{ は } 0 \text{ でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化する。

(Step 2-1) より $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ は $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルの組で、1 次独立である。

(Step 2-2) より $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルである。

得られた固有ベクトルを並べて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を作る。

行列の対角化

対角化可能となる条件

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

だから P は正則, したがって A は対角化可能。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 4) 検算する。 P^{-1} を求めると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

これを用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

[例題 6]

(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し、可能な場合対角化する。

(Step 1) 固有方程式を解いて固有値を求める。

$$\begin{aligned} |B - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 2 - \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 - \lambda & \\ 0 & 1 - \lambda & 1 & \\ 0 & -1 + 2 - \lambda & 1 + (1 - \lambda)(2 - \lambda) & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

$$\begin{aligned} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 + 2 - \lambda & 1 + (1 - \lambda)(2 - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 - \lambda & \lambda^2 - 3\lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \{ \lambda^2 - 3\lambda + 3 - 1 \} \\ &= -(1 - \lambda)^2 (\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

を解いて固有値は $\lambda = 1$ (2重解), 2 .

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-1) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = x_2, x_3 = 0$$

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c_1 \text{ は } 0 \text{ でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 2-2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよい。

行列の対角化

対角化可能となる条件

Gauss の消去法で解く.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$x_1 = 0, x_2 = x_3$$

$$\mathbf{x} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_2 \text{ は } 0 \text{ でない任意の数}$$

行列の対角化

対角化可能となる条件

(Step 3) 対角化可能性の判定。線形独立な固有ベクトルが 2 個しか作れないから対角化可能ではない。