本日やること

1. 線形変換
   - 復習:線形変換
   - 復習：回転を表す線形変換
   - 直交行列・直交変換

線形変換
復習:線形変換

[線形変換]　平面の点 P(x, y) に対して,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって平面の点 P$'(x', y')$ を対応させる写像 $f(x, y) = (x', y')$ を線形変換という. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f を表す行列という

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$ とおくと, ベクトルをベクトルに移す写像と考えられ,

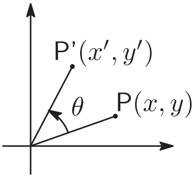
$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

となる.

線形変換

復習：回転を表す線形変換

平面上の点の回転を表す線形変換



原点の周りで点を θ(rad) 回転させる変換 f は線形変換であり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

と表される。

線形変換

直交行列・直交変換

直交行列の定義

$n\ (n=2,3,\cdots)$ 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ が直交行列であるとは

$$ {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} $$

が成り立つこと。

線形変換

直交行列・直交変換

直交行列の列ベクトルの性質

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n$$

とおくとき

$$\boldsymbol{A} \text{ が直交行列} \iff \begin{cases} |\boldsymbol{a}_j|^2 = 1, & j = 1, 2, \cdots, n \\ \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = 0, & i \neq j \end{cases}$$

線形変換
直交行列・直交変換

[確かめ]

$$ {}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ a_{1i} & \cdots & a_{ni} \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} $$

${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$ の (i, j) 成分は $\boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j$ だから明らか。

線形変換

直交行列・直交変換

[例 3] 回転を表す行列は直交行列である。なぜなら

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ とすると $${}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ だから

$${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

線形変換

直交行列・直交変換

直交変換の定義

直行行列で表される線形変換を**直交変換**という。

線形変換

直交行列・直交変換

直交変換の性質

1. 直交変換はベクトルの内積・大きさを変えない。
2. ベクトルの内積・大きさを変えない線形変換は直交変換である。
3. 直交変換の合成変換は直交変換である。

[準備] 行列 (またはベクトル) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して ${}^t(\boldsymbol{AB}) = {}^t\boldsymbol{B}{}^t\boldsymbol{A}$

[1 の確かめ] $\boldsymbol{A}$ は直行行列, $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Ap}$ とする。任意のベクトル $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ に対して

$$f(\boldsymbol{p}) \bullet f(\boldsymbol{q}) = {}^t(\boldsymbol{Ap}) \bullet \boldsymbol{Aq} = ({}^t\boldsymbol{p}{}^t\boldsymbol{A})\boldsymbol{Aq} = {}^t\boldsymbol{p}({}^t\boldsymbol{AA})\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{p}(\boldsymbol{E})\boldsymbol{q} = {}^t\boldsymbol{pq} = \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q}$$

だから内積は変わらない。

$$|f(\boldsymbol{p})|^2 = f(\boldsymbol{p}) \bullet f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2$$

だから大きさも変わらない。

線形変換

直交行列・直交変換

[2 の確かめ] $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$,

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n), \quad \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_j \text{ は基本ベクトル}, \; j = 1, 2, \cdots, n$$

とおく.

$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の性質より

$$|\boldsymbol{e}_1|^2 = \cdots = |\boldsymbol{e}_n|^2 = 1, \; \boldsymbol{e}_i \bullet \boldsymbol{e}_j = 0, (i \neq j).$$

$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j$ であり, f はベクトルの内積・大きさを変えないから

$$|\boldsymbol{a}_1|^2 = \cdots = |\boldsymbol{a}_n|^2 = 1, \; \boldsymbol{a}_i \bullet \boldsymbol{a}_j = 0, (i \neq j)$$

だから $\boldsymbol{A}$ は直交行列

線形変換
直交行列・直交変換

直交変換の性質・追加

4. 直交変換は 2 点の距離を変えない。
5. 直交変換は角の大きさを変えない。

[確かめ]

$f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$, $f(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}'$ とし, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \boldsymbol{p}'$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = \boldsymbol{q}'$ とする。

$$|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|, |\boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{q}'|, \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' \bullet \boldsymbol{q}'$$

だから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}|^2 = |\boldsymbol{q}|^2 - 2(\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q}) + |\boldsymbol{p}|^2 \\ &= |\boldsymbol{q}'|^2 - 2(\boldsymbol{p}' \bullet \boldsymbol{q}') + |\boldsymbol{p}'|^2 = |\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{p}'|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}|^2 \end{aligned}$$

で 4 がわかる。5 も同様。