本日やること

1. 線形変換
   - 復習:線形変換
   - 合成変換・逆変換
   - 回転を表す線形変換

線形変換

復習:線形変換

[復習：線形変換]　平面の点 P(x, y) に対して,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって平面の点 P$'(x', y')$ を対応させる写像 $f(x, y) = (x', y')$ を線形変換という. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f を表す行列という

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$ とおき, ベクトル $\boldsymbol{p}$ をベクトル $\boldsymbol{p}'$ に移す写像と考えると

$$\boldsymbol{p}' = f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

となる.

線形変換

合成変換・逆変換

線形変換の合成変換

線形変換 $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$, $g(\boldsymbol{p}') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}'$ の合成変換

$$g \circ f : \boldsymbol{p} \mapsto g(f(\boldsymbol{p}))$$

は線形変換となり

$$g \circ f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

である。

[確かめ]

$$g \circ f(\boldsymbol{p}) = g(f(\boldsymbol{p})) = g(\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

だからあきらか。

線形変換

合成変換・逆変換

線形変換の逆変換

線形変換 $f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$, $g(\boldsymbol{p}') = \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}'$ の合成変換 $g \circ f$ が恒等変換になるとき, g を f の逆変換といい f^{-1} で表す.

$$f \text{ が逆変換を持つ} \iff \boldsymbol{A} \text{ が正則}$$

であり

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$$

である。

[確かめ]

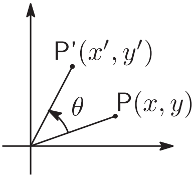
$$g \circ f \text{ が恒等変換} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} \iff \boldsymbol{A} \text{ が正則}$$

だからあきらか。

線形変換

回転を表す線形変換

平面上の点の回転を表す線形変換



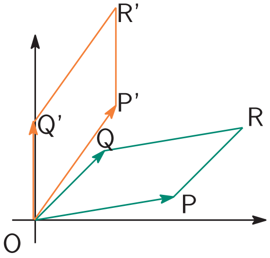
原点の周りで点を θ(rad) 回転させる変換 f は線形変換であり

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

と表される。

線形変換
回転を表す線形変換

[確かめ]（Step 1.）



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{p}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boldsymbol{q}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{r}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \boldsymbol{p}', \qquad \overrightarrow{\mathrm{OQ}'} = \boldsymbol{q}', \qquad \overrightarrow{\mathrm{OR}'} = \boldsymbol{r}'$$
$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}', \qquad f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}', \qquad f(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}',$$

とする．f はすべての図形を合同な図形に移すから

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \Rightarrow$ OPRQ は平行四辺形

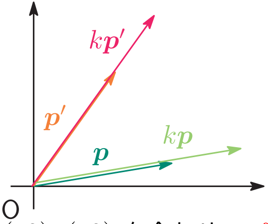
$\Rightarrow$ OP'R'Q' は平行四辺形

$\Rightarrow \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{q}'$

したがって

$$f(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}) \cdots (\star 2)$$

線形変換
回転を表す線形変換

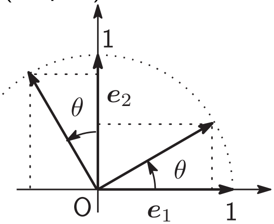


同様の考え方で スカラー k に対して

$$f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p}) \cdots (\star 3)$$

$(\star 2)$, $(\star 3)$ を合わせて f は線形変換であることがわかる。

(Step 2.)



$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

線形変換

回転を表す線形変換

$\mathsf{P}(x, y)$，$\mathsf{P}'(x', y')$，$f(\overrightarrow{\mathsf{OP}}) = \overrightarrow{\mathsf{OP}'}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathsf{OP}} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2,$$

だから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathsf{OP}'} &= f(\overrightarrow{\mathsf{OP}}) = xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) \\ &= x\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

これは $(\star)$ と同じ。

線形変換

合成変換・逆変換

[例：加法定理] 回転が線形変換であることから，次のように三角関数の加法定理を導くことができる。

f を α (rad) 回転させる変換，g を β (rad) 回転させる変換 とすると合成変換 $g \circ f$ は $\alpha + \beta$ (rad) 回転させる変換であるから

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

成分を比較して

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

が導かれた。