本日やること

1. 線形変換
   - 復習:線形変換
   - 図形の変換

線形変換

復習:線形変換

[復習：線形変換]　平面の点 P(x, y) に対して,

$$(\star)\ \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a, b, c, d : \text{は定数}$$

によって平面の点 P$'(x', y')$ を対応させる働きを線形変換という.

$$f : (x, y) \mapsto (x', y') \text{ または } f(x, y) = (x', y')$$

で表す.

$$(\star) \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{だから} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ を } f \text{ を表す行列という}$$

線形変換

復習:線形変換

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおいてベクトル $\boldsymbol{p}$ をベクトル $\boldsymbol{p}'$ に移す変換とみて

$$f : \boldsymbol{p} \mapsto \boldsymbol{p}' \quad \text{または} \quad f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$$

とも表す.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$ とおくと

$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}$$

である。

線形変換

復習：線形変換の性質

復習：線形変換の特徴づけ

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は任意のベクトル, k, l は任意の実数とする。次の [1], [2], [3] は同値である。

[1] f は線形変換である。 (つまりある行列 A があって $f(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p}$)

[2] $f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q})$, $f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p})$, ($k$ は実数)

[3] $f(k\boldsymbol{p}+l\boldsymbol{q}) = kf(\boldsymbol{p}) + lf(\boldsymbol{q})$

線形変換

図形の変換

G: 平面の点の集合 (つまり「図形」)

に対して

$G' = \{f(\mathrm{P}) | \mathrm{P} \in G\}$ (これを $f(G)$ と書く)

を G の f による**像**という.

線形変換
図形の変換

復習：平面の直線・線分

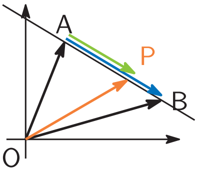
平面の異なる 2 点 A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) に対して

(i)P が直線 AB 上にある

$\iff \quad \vec{\mathrm{OP}} = t\vec{\mathrm{OA}} + s\vec{\mathrm{OB}},\ t + s = 1$ となる実数 t, s がある

(ii)P が線分 AB 上にある

$\iff \quad \vec{\mathrm{OP}} = t\vec{\mathrm{OA}} + s\vec{\mathrm{OB}},\ t + s = 1, t \geqq 0, s \geqq 0$ となる実数 t, s がある



[確かめ]

P が直線 AB 上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は平行

$\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\iff \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (1 - s = t$ とおけ $)$

線分のときは $0 \leqq s \leqq 1$

線形変換

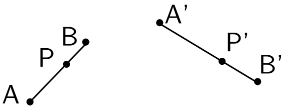
図形の変換

線分の像

f を線形変換とし　$f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}'$,　$f(\mathsf{B}) = \mathsf{B}'$　$\cdots(\star)$　とするとき, 線分 AB の像は線分 A$'$B$'$ または点 A$'$ $(= \mathsf{B}')$ である.

$(\star)$ は $f(\overrightarrow{\mathsf{OA}}) = \overrightarrow{\mathsf{OA}'}$, $f(\overrightarrow{\mathsf{OB}}) = \overrightarrow{\mathsf{OB}'}$ とも書ける。

[確かめ]



P が線分 AB 上にある

$$\iff \quad \overrightarrow{\mathsf{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathsf{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathsf{OB}},\ (t+s=1, t \geqq 0, s \geqq 0)$$

$$f(\overrightarrow{\mathsf{OP}}) = f(t\,\overrightarrow{\mathsf{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathsf{OB}}) = t\,f(\overrightarrow{\mathsf{OA}}) + s\,f(\overrightarrow{\mathsf{OB}})$$

$$\overrightarrow{\mathsf{OP}'} = t\,\overrightarrow{\mathsf{OA}'} + s\,\overrightarrow{\mathsf{OB}'}$$

だから $A' \neq B' \Rightarrow \mathsf{P}'$ は A$'$B$'$ 上.　$A' = B' \Rightarrow \mathsf{P}' = \mathsf{A}' = \mathsf{B}'$.

線形変換

図形の変換

直線の像

f を線形変換とし $f(\mathsf{A}) = \mathsf{A}'$, $f(\mathsf{B}) = \mathsf{B}'$ とするとき, 直線 AB の像は直線 $\mathsf{A}'\mathsf{B}'$ または点 A' $(= \mathsf{B}')$ である.

[確かめ] 線分の場合の条件 $t \geqq 0, s \geqq 0$ を外せばすぐわかる。

線形変換

図形の変換

[例題 4.]

f : $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ で決まる線形変換.

ℓ : 直線 $y = 2x - 1 \cdots (\star)$

のとき ℓ の f による像を求めよう.

$(\star)$ により

$x = 0 \;\Rightarrow\; y = -1$ したがって ℓ は A$(0, -1)$ を通る.
$x = 1 \;\Rightarrow\; y = 1$ したがって ℓ は B$(1, 1)$ を通る.

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}'},$$

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OB}'}$$

ℓ の像は A'$(2, -1)$, B'$(-1, 4)$ をとおる直線だから傾き $-\dfrac{5}{3}$ で $5x + 3y = 7$