本日やること

1. 線形変換
   - 線形変換の定義
   - 線形変換の例
   - 線形変換の性質

線形変換

線形変換の定義

ベクトルの記法を変えます

$$\vec{\boldsymbol{a}} \to \boldsymbol{a}, \qquad (a_1, \cdots, a_n) \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

線形変換

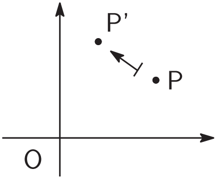
線形変換の定義

平面上の変換の定義

平面の点 P(x,y) に対して平面の点 P$'(x',y')$ を対応させる働きを**平面上の (点の) 変換**という．**平面の写像**ともいう。

$$f:(x,y)\mapsto(x',y'),\qquad f(x,y)=(x',y'),$$
$$f:\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}',\qquad f(\mathrm{P})=\mathrm{P}'$$

で表す． $f(\mathrm{P})$ を **P の f による像**という．



線形変換

線形変換の定義

線形変換の定義

平面上の変換 $f : (x, y) \mapsto (x', y')$ が平面上の線形変換 (1 次変換) であるとは, ある定数 a, b, c, d があって

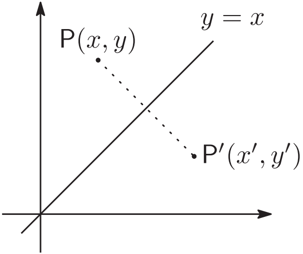
$$(\star) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

となること。

$(\star) \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ だから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f を表す行列という

線形変換
線形変換の例

[例 直線 $y = x$ に関する対称変換]



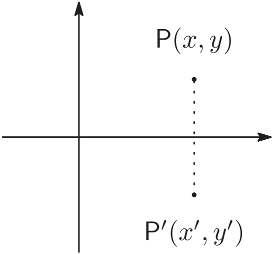
$$\begin{cases} x' = y = 0x + 1y \\ y' = x = 1x + 0y \end{cases}$$

変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

線形変換
線形変換の例

[問 2(1)　x 軸に関する対称移動]



$$\begin{cases} x' = x = 1x + 0y \\ y' = -y = 0x - 1y \end{cases}$$

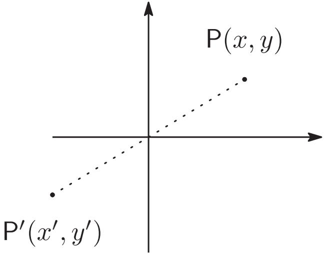
線形変換であり，変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

線形変換

線形変換の例

[問 2(2)　原点に関する対称移動]



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

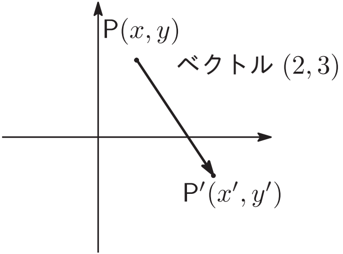
線形変換であり, 変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

線形変換

線形変換の例

[問 2(3)　ベクトル $(2, -3)$ だけ平行移動]



$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases}$$

線形変換ではない。

線形変換

線形変換の性質

以後

$$\mathsf{P}(x, y) \longleftrightarrow \overrightarrow{\mathsf{OP}} = \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

という同一視で線形変換をベクトルをベクトルに移す変換とみることにする。

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}'$$

で表す

線形変換

線形変換の性質

重要な線形変換

[0 変換]

$f(\boldsymbol{p}) = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{p}$ は任意のベクトル) 表す行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

[恒等変換]

$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{p}$ は任意のベクトル) 表す行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

線形変換

線形変換の性質

線形変換を表す行列の決定法

$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$：1 次独立なベクトルとし線形変換 f は

$$f(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p}', \quad f(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}'$$

を満たすとする．このとき f を表す行列 A は

$$A = \left(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'\right)\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right)^{-1}$$

[注意] $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ に対して $\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$ のような表現を用いる。

線形変換

線形変換の性質

[確かめ]　$\boldsymbol{p}' = A\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}' = A\boldsymbol{q}$ だからこれを並べて書いて

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}'\right) &= \left(A\boldsymbol{p}, A\boldsymbol{q}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 & a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 & a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & q_2 \\ p_1 & q_2 \end{pmatrix} = A\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right)
\end{aligned}
$$

となるが，$\left(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\right)$ は正則になるからこれの逆行列をかければよい。

線形変換

線形変換の性質

[例]

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であるような線形変換 f を表す行列を A とすると

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

だからこれを並べて書いて

$$A\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

となるから両辺に右から $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ をかけて

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

線形変換

線形変換の性質

線形変換の特徴づけ

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は任意のベクトル, k, l は任意の実数とする。次の [1], [2], [3] は同値である。

[1] f は線形変換である。 (つまりある行列 A があって $f(\boldsymbol{p}) = A\boldsymbol{p}$)

[2] $f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q})$, $\quad f(k\boldsymbol{p}) = kf(\boldsymbol{p})$,

[3] $f(k\boldsymbol{p}+l\boldsymbol{q}) = kf(\boldsymbol{p}) + lf(\boldsymbol{q})$

[確かめ]

[2]⇔[3] は明らか。

[1]⇒[2] は:

$$f(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = A(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}) = A\boldsymbol{p} + A\boldsymbol{q} = f(\boldsymbol{p}) + f(\boldsymbol{q}),$$

$$f(k\boldsymbol{p}) = A(k\boldsymbol{p}) = kA\boldsymbol{p} = kf(\boldsymbol{p}),$$

線形変換

線形変換の性質

[2]⇒[1] は:

$$A = \Big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)\Big), \quad \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい。なぜなら

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ とおくと $\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2$ だから

$$f(\boldsymbol{p}) = f(p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2) = p_1 f(\boldsymbol{e}_1) + p_2 f(\boldsymbol{e}_2) = \Big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)\Big)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = A\boldsymbol{p}$$