

電気のための線形代数 C  
演習問題 No.7 解答例

学生番号

--	--	--	--	--	--	--	--

7.1. (1) 対称行列  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の対角化行列 (直交行列にできる) を求め, 対角化せよ.

(step1) 固有値は固有方程式  $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$  の解である.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \left| \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

だからこれをといて固有値は  $\lambda = 7, 2$ . (解の公式により  $\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$  でもよい)

(step2-1)  $\lambda = 2$  に対する固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を求める.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 6 - 2 & 2 \\ 2 & 3 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

したがって  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ( $c_1$  は 0 でない任意の数)

大きさを 1 にするには  $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$  だから  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  とすればよいので

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(step2-2)  $\lambda = 7$  に対する固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を求める

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 6 - 7 & 2 \\ 2 & 3 - 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 = 2x_2 \end{aligned}$$

したがって  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $c_2$  は 0 でない任意の数

大きさを 1 にするには  $\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$  だから  $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$  とすればよいので

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Step3) 固有ベクトルを並べて対角化行列  $\mathbf{T}$  をつくと  $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  が得ら

れる。これにより  $\mathbf{A}$  を対角化すると  ${}^t\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot (*)$

(Step4) 確かに  $(*)$  となるか 検算する。

$$\mathbf{T}^{-1} = {}^t\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ だから}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

となることを各自計算して確かめよ。

(2) 2次形式  $6x^2 + 4xy + 3y^2$  の標準形を求めよ。

$$\begin{aligned} 6x^2 + 4xy + 3y^2 &= (x, y) \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \mathbf{T} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} {}^t\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x', y') \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= 2x'^2 + 7y'^2 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{T} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

これが標準形。

(3) (追加)  $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}$  の固有値を求めよ。

$$({}^t\mathbf{A}\mathbf{T})^2 = {}^t\mathbf{A}\mathbf{T}{}^t\mathbf{A}\mathbf{T} = {}^t\mathbf{A}^2\mathbf{T}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} \text{ に注意して}$$

$$\begin{aligned} {}^t(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A})\mathbf{T} &= {}^t\mathbf{A}^2\mathbf{T} - 2{}^t\mathbf{A}\mathbf{T} = ({}^t\mathbf{A}\mathbf{T})^2 - 2{}^t\mathbf{A}\mathbf{T} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 7^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 0 \\ 0 & 2 \times 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^2 - 2 \times 2 & 0 \\ 0 & 7^2 - 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから固有値は 0, 35.