電気のための線形代数 C 演習問題 No.6 解答例	学生番号		

6.1.

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = 0$ の解である.

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \text{第 1 行を } (1-\lambda) \text{ 倍して引く} \\ \text{第 1 行をたす} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & -1-(-1+\lambda)(1-\lambda) & 1-(-1)(1-\lambda) \\ 0 & -1+(-1+\lambda) & 3-\lambda+(-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda & -\lambda+2 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda(\lambda-2) & -\lambda+2 \\ 0 & \lambda-2 & -\lambda+2 \end{vmatrix}$$

第 2 行, 第 3 行から $\lambda - 2$ をくくりだす。

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

第 1 列で展開

$$= (\lambda-2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 1,\ 2(2$ 重解$)$.

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を求める

$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ となるから $\quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0$

したがって $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$ とおくと $x_1 = -c_1 + c_2$ となるので

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0,\ c_2 \neq 0 \text{ は任意 })$$

がすべての固有ベクトルを与える。

検算する.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}$$

だから確かに固有値 2 に対する固有ベクトルとなっている.

(step3) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{y}$ を求める

$A\boldsymbol{y} = 1 \cdot \boldsymbol{y}$ となるから $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow -y_1 + y_3 = 0, \quad -y_2 + y_3 = 0$

したがって $y_3 = c_3$ とおくと $y_1 = y_2 = c_3$ となるので

$$\boldsymbol{y} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0 \text{ は任意})$$

がすべての固有ベクトルを与える。

検算する.

$$A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y}$$

だから確かに固有値 1 に対する固有値となっている.

(Step 4)　対角化する。得られた固有ベクトル $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を並べて

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を作る。

$|\boldsymbol{P}| = 1 \neq 0$ だからこれらの固有ベクトルは 1 次独立, したがって $\boldsymbol{A}$ は対角化可能と言える。

検算しよう。

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

実際に計算して確かめること。