

--	--	--	--	--	--	--	--

5.1 行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ の解である.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| &= \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(5 - \lambda) - 2 \times (-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 2, 3$.

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル \mathbf{x} を求める

$\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ となるから $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 = 2x_1 \\ -3x_2 + 5x_2 = 2x_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

したがって

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1 \text{ は任意の数}$$

検算する.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c' \\ 2c' \end{pmatrix} = 2\mathbf{x}$$

だから正しい.

(Step3) $\lambda = 3$ に対する固有ベクトル \mathbf{y} を求める

$\mathbf{A}\mathbf{y} = 3\mathbf{y}$ となるから $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y_2 = 3y_1 \\ -3y_1 + 5y_2 = 3y_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2y_2 = 3y_1$$

したがって

$$\mathbf{y} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ または } c'_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c_2, c'_2 \text{ は任意の数}$$

検算する.

$$A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c'_2 \\ 3c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c'_2 \\ 9c'_2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{y}$$

だから正しい.

5.2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

(step1) 固有値は固有方程式 $|A - \lambda E| = 0$ の解である.

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{第1行を}(1-\lambda)\text{倍して引く} \\ \text{第1行をたす} \end{array} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & -1 - (-1+\lambda)(1-\lambda) & 1 - (-1)(1-\lambda) \\ 0 & -1 + (-1+\lambda) & 3-\lambda + (-1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda & -\lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda(\lambda - 2) & -\lambda + 2 \\ 0 & \lambda - 2 & -\lambda + 2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

第2行, 第3行から $\lambda - 2$ をくくりだす。

$$= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1+\lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

第1列で展開

$$= (\lambda - 2)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

だからこれをといて固有値は $\lambda = 1, 2$.

(step2) $\lambda = 2$ に対する固有ベクトル \mathbf{x} を求める

$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ となるから $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-2 & -1 & 1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

したがって $x_2 = c_1, x_3 = c_2$ とおくと $x_1 = -c_1 + c_2$ となるので

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_1 \neq 0, c_2 \neq 0 \text{ は任意.}$$

検算する.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{x} \end{aligned}$$

だから正しい.

(step3) $\lambda = 1$ に対する固有ベクトル \mathbf{y} を求める

$A\mathbf{y} = 1 \cdot \mathbf{y}$ となるから $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -y_1 + y_3 = 0, \quad -y_2 + y_3 = 0$$

したがって $y_3 = c_3$ とおくと $y_1 = y_2 = c_3$ となるので

$$\mathbf{y} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c_3 \neq 0 \text{ は任意.}$$

検算する.

$$A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{y}$$

だから正しい.