電気のための線形代数 C 演習問題 No.4 解答

学生番号		

4.1. 「直交変換の合成変換はまた直交変換になる」ことを証明せよ。

直交行列の積が再び直交行列となることを示せばよい。

A, B を直交行列とする。定義により ${}^tAA = E, {}^tBB = E$ である.

AB は

$${}^t(AB)\,(AB) = ({}^tB\,{}^tA)\,(AB) = {}^tB\,({}^tAA)\,B = {}^tBEB = {}^tBB = E$$

をみたすから直交行列である。

「直交変換 $\Longleftrightarrow$ 内積を変えない」を用いて「内積を変えない変換の合成変換も内積を変えない」ことを示してもよい。

4.2. 2次の直行行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

のどちらかの形をしている。このことを証明せよ。

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列であるとすると定義より

$${}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

でなくてはならないが,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{cases} a^2+c^2 = 1 & (\star) \\ b^2+d^2 = 1 & (\star\star) \\ ab+cd = 0 & (\star\star\star) \end{cases}$$

である. ところで $(\star)$ により点 (a, c) は原点中心半径 1 の円周上にあるから

$$a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta$$

となる角 θ がある。同様に $(\star\star)$ により

$$b = \cos\varphi, \quad d = \sin\varphi$$

となる角 φ がある。あとは $(\star\star\star)$ により θ と φ の関係を決めればよい。

あとは各自で考えること。

4.3. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ はどういう変換の行列であるか。

原点を通り x 軸とのなす角が α である直線を ℓ とする。

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ が表す線形変換は, 原点中心に角 α の回転

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が表す線形変換は, x 軸に関する対称移動

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ が表す線形変換は, 原点中心に角 $-\alpha$ の回転

だからこれらを合成してできる変換は直線 ℓ に関する対称移動である。

(自分でわかった人はどれだけいますか？)