電気のための線形代数C 演習問題 No.3 電気系	学生番号		

3.1.

(1). $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ に, $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ にうつす線形変換を表す行列 A をもとめよ.

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ にうつすから A $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ にうつすから A $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

この2つをならべて A $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ は単位行列だから

A $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ =A

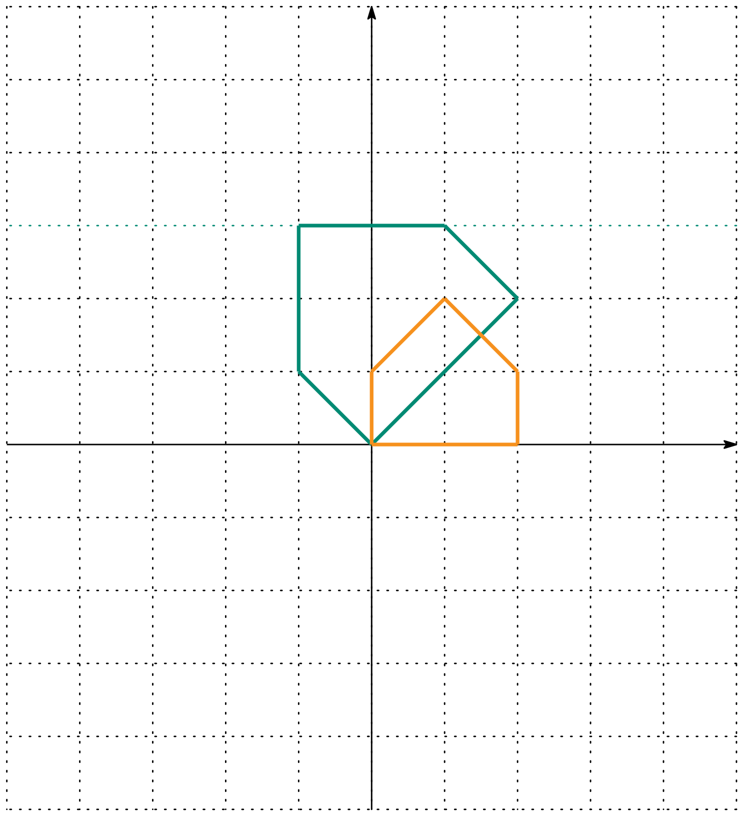
したがって

A= $\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

(2). 原点回りの角 $\frac{\pi}{4}$ ラジアンの回転を表す行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

(3). (1) の変換は, 原点回りの回転と, 拡大を合成したものである. どういう回転と拡大であるか答えよ. また図形の移る先の図形を書け.



(2) の結果より

$$\mathrm{A}= \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4} \\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

だから

A による変換は, まず原点の周りで $\dfrac{\pi}{4}$ ラジアン回転させ, 次に全体を原点中心に $\sqrt{2}$ 倍に拡大するような変換である.

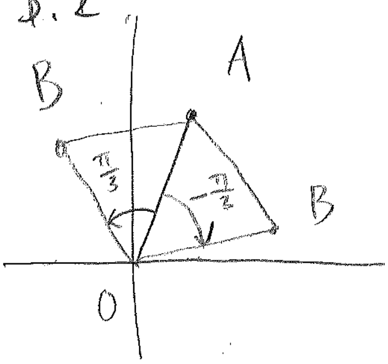
追加

3.2. $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(1,3)$ に対して $\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形となるような点 B を求めよ。

追加

3.3. 3 倍角の公式をつくれ。つまり $\cos 3\theta$, $\sin 3\theta$ を $\cos\theta$, $\sin\theta$ の式で表せ。回転の行列の積を使うこと。

3.2



$\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \pm\sin\frac{\pi}{3}$
$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ より

$\pm\frac{\pi}{3}$ 回転の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3}, & \mp\sin\frac{\pi}{3} \\ \pm\sin\frac{\pi}{3}, & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2}, & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

だから、Bの座標を(x, y)とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}, & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2}, & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{3}{2} \\ \pm\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

で

Bは $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

3.3. 各自考えよ、