電気のための線形代数 C 演習問題 No.2 解答	学生番号		

8.1.

(1) (1,0) を (2,0) に,(0,1) を (1,1) へ移す 1 次変換を表す行列を求めよ.

(1) 一次変換を表す行列を $\boldsymbol{A}$ とおくと,

$$f:\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\quad \text{したがって}\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

$$f:\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad \text{したがって}\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

2 つの等式を並べて書くと

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

一方

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

だから

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$$

(2) (1) の線形変換で, 図のような図形がどのような図形に移されるか描け.

$f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ だから O$(0,0)$ は O$(0,0)$ に移る.

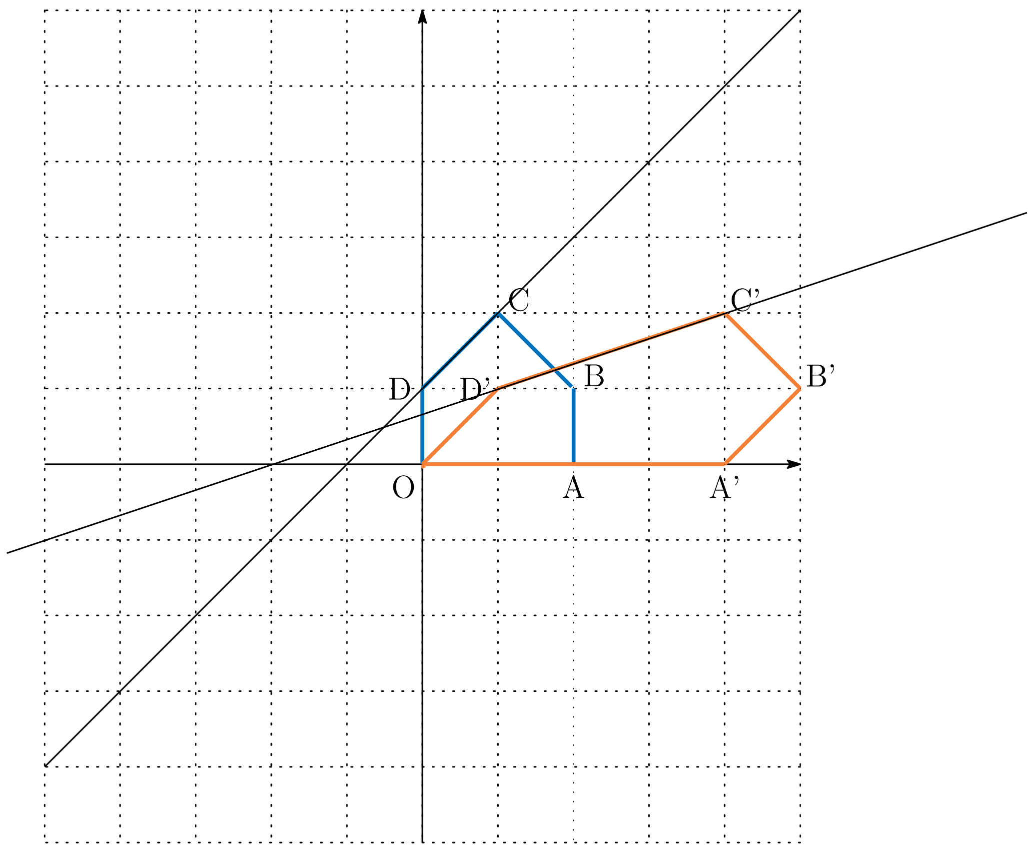
$f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ だから A$(2,0)$ は A'$(4,0)$ に移る.

$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ だから B$(2,1)$ は B'$(5,1)$ に移る.

$f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ だから C$(1,2)$ は C'$(4,2)$ に移る.

$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ だから D$(0,1)$ は D'$(1,1)$ に移る.

線分は線分に移るから青い図形はオレンジの図形に移る。



(3) (1) の線形変換で, 直線 $y = x + 1$ がどのような図形に移されるかを描け.

直線 $y = x + 1$ を ℓ と書く。線形変換は直線を直線 (または 1 点) に移す. ℓ の像の直線を ℓ' と書く.

$x = 0, y = 1$ は $y = x + 1$ を満たすから ℓ は点 D$(0, 1)$ を通る. 同様に $x = 1, y = 2$ は $y = x + 1$ を満たすから ℓ は点 C$(1, 2)$ を通る.

ℓ' は ℓ の f による像だから 点 D'$(1, 1)$, C'$(4, 2)$ を通る.

ℓ' の方程式は $y = ax + b$ (a, b は定数) の形をしているが,

D'$(1, 1)$ を通るから $1 = a + b$

C'$(4, 2)$ を通るから $2 = 4a + b$

が成り立つ。これを解いて $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{2}{3}$ だから

ℓ' の方程式は $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$