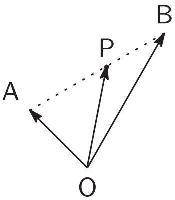
本日やること

1. 行列式
   - ベクトルの 1 次独立性
   - 行列式の図形的意味

行列式

ベクトルの 1 次独立性

[直線上の点]



点 P が直線 AB 上にある

$\iff$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t+s=1$ となる実数 t, s がある。

だから A$\neq$B のとき

(i) 直線 AB 上が原点 O をふくむ

$\iff$

(ii) $\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t+s=1$ となる実数 t, s がある。

$\iff$

(iii) $\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ となる実数 t, s がある。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)

2 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が

1 次独立であるとは O, A, B が同一直線上にないこと。

1 次従属であるとは O, A, B が同一直線上にあること。

と定める。

前の述べたことから

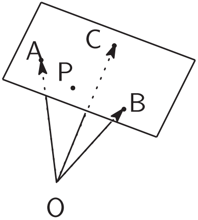
2 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次独立 $\iff$ 「$\vec{\mathbf{0}} = t\vec{a} + s\vec{b} \Rightarrow t = s = 0$」

といっても同じことである。

行列式
ベクトルの 1 次独立性

[平面上の点]



点 P が A B C を含む平面上にある

$\iff$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $t + s + r = 1$ となる実数 t, s, r がある。

だから A, B, C がすべて異なるとき

A B C を含む平面が原点 O をふくむ

$\iff$

$\vec{\mathbf{0}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $t \neq 0$ または $s \neq 0$ または $r \neq 0$ となる実数 t, s, r がある。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 1)

3 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が
　独立であるとは O, A, B, C が同一平面上にないこと。
　1 次従属であるとは O, A, B, C が同一平面上にあること。
と定める。

前述のことにより

3 つのベクトルの 1 次独立性の定義 (その 2)

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立 $\iff$ 「$\vec{0} = t\vec{a} + s\vec{b} + r\vec{c} \Rightarrow t = s = r = 0$」

といっても同じことである

行列式

ベクトルの 1 次独立性

n 個のベクトルの 1 次独立性の定義

n 個のベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n$ が 1 次独立であるとは

「$\vec{\mathbf{0}} = t_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + t_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + t_n\vec{\boldsymbol{a}}_n \;\Rightarrow\; t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$」であること。

1 次従属であるとは 一次独立でないこと。

と定める。

$n = 2, 3$ のときは前述したものと一致する。

行列式

ベクトルの 1 次独立性

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ の列ベクトルを $\vec{\boldsymbol{a}}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, \cdots, n$

とする．このとき

1 次独立性の条件

$\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n\}$ が 1 次独立 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ が正則

行ベクトルについても同様である。

行列式
ベクトルの 1 次独立性

[確かめ] 第 6 回に述べたように

$\boldsymbol{A}$ が正則 $\iff$

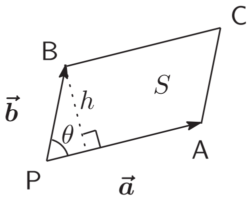
$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = t_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + t_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + t_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{0}}$$ が $t_1 = \cdots = t_n = 0$ 以外の解を持たない

だから明らか。

行列式

行列式の図形的意味

平行四辺形の面積



PACB は $\vec{a}$, $\vec{b}$ で張られる平行四辺形で面積は S,

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき

$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の絶対値

行列式

行列式の図形的意味

[確かめ] $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ, 高さを h とする.

$$S^2 = |\vec{a}|^2 h^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$$

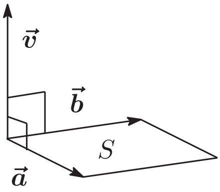
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だから

$$\begin{aligned}
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2 \\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
&= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2
\end{aligned}$$

行列式

行列式の図形的意味

空間のベクトルの外積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{v}$, $\vec{b} \perp \vec{v}$

(ii) $|\vec{v}| = \vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 $(= S$ とおく$)$

(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\vec{v}$ がただ一つある。この $\vec{v}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積といい

$$\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次従属ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。

行列式
行列式の図形的意味

外積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

行列式
行列式の図形的意味

[(i) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \bullet \vec{v} &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

$\vec{b} \bullet \vec{v} = 0$ も同様。

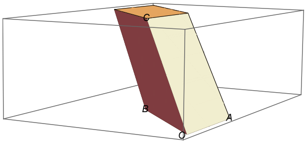
行列式
行列式の図形的意味

[(ii) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
S^2 &= |\vec{\boldsymbol{a}}|^2|\vec{\boldsymbol{b}}|^2 - (\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= |\vec{\boldsymbol{v}}|^2
\end{aligned}
$$

行列式
行列式の図形的意味

平行 6 面体の体積



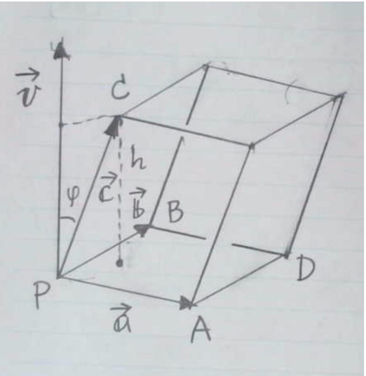
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

で張られる平行 6 面体の体積 V は

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ の絶対値

行列式
行列式の図形的意味

[確かめ]



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は右手系とする。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{a} \bullet (\vec{b} \times \vec{c})$$
$$= |\vec{a}||\vec{b} \times \vec{c}| \cos\theta$$
$$= V$$