

本日よりること

- 1 行列式
 - 行列式の定義

行列式

行列式の定義

[復習]

2 次の行列式の定義 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3 次の行列式の定義 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

行列式

行列式の定義

2,3 次の行列式を計算するサラスの方法

2 次の行列式 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3 次の行列式 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

4 次以上では正しくない。

行列式

行列式の定義

以下, n 次の行列式を構成する。

復習 2 次の行列式の性質 :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 = (a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) \circ (a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) \stackrel{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2$$

であった。

行列式

行列式の定義

これにならって

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$\vec{a}_1 \circ \vec{a}_2 \circ \dots \circ \vec{a}_n \stackrel{\text{展開}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \dots \circ \vec{e}_n \quad \cdots (*)$$

となるように n 次の行列式を決めたい。

行列式

行列式の定義

[n 次行列式の導出]

(\star) の左辺

$$(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n) \longrightarrow$$

$$\circ (a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n) \longrightarrow$$

\vdots

$$\circ (a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n) \longrightarrow$$

取り出す項

$$\text{第 } P_1 \text{ 項} = a_{P_1 1} \vec{e}_{P_1}$$

$$\text{第 } P_2 \text{ 項} = a_{P_2 2} \vec{e}_{P_2}$$

$$\text{第 } P_n \text{ 項} = a_{P_n n} \vec{e}_{P_n}$$

取り出した項を乗積すると

$$a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \vec{e}_{P_1} \circ \vec{e}_{P_2} \circ \cdots \circ \vec{e}_{P_n} \cdots (\star\star)$$

P_1, \dots, P_n に同じものがあつたら $= \vec{0}$ となるから

$P = (P_1, \dots, P_n)$ は $\{1, \dots, n\}$ の順列としてよい。

行列式

行列式の定義

並べ替えにより

$$\vec{e}_{P_1} \circ \vec{e}_{P_2} \circ \cdots \circ \vec{e}_{P_n} = \varepsilon_P \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n$$

ただし

$$\varepsilon_P = \begin{cases} 1, & P \text{ は } (1, 2, \dots, n) \text{ に (隣り合うものの) 入れ替えを} \\ & \text{偶数回行って得られる} \\ -1, & \text{奇数回行って得られる} \end{cases}$$

これを**順列 P の符号**という。これにより

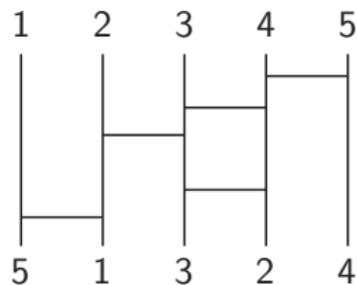
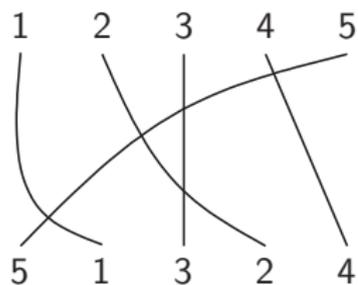
$$(\star\star) = a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \varepsilon_P \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n \quad \cdots (\star\star\star)$$

ある順列 P を、「 $(1, 2, \dots, n)$ から (隣り合うものの) 入れ替えで作る方法は複数回あるが、その入れ替えの回数は「**すべて偶数回であるかすべて奇数回であるか**」のどちらかである。

行列式

行列式の定義

[順列のあみだくじによる表示]



あみだくじの横線の本数を r とするとき

$$\varepsilon_P = (-1)^r$$

である。

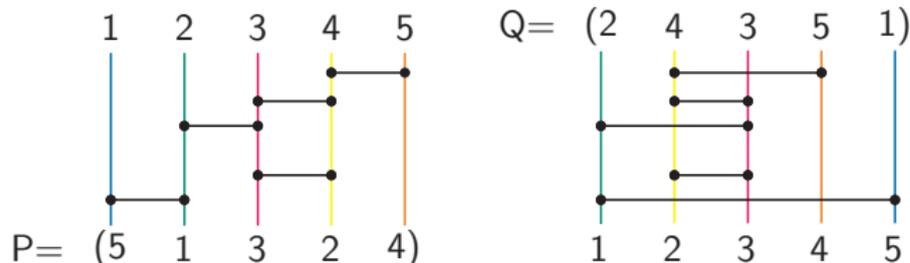
行列式

行列式の定義

$a_{1P_1}a_{2P_2}\cdots a_{nP_n}$ を列番号順に並び替えて $a_{Q_11}a_{Q_22}\cdots a_{Q_nn}$ となったとすると, Q_1, \dots, Q_n は $1, \dots, n$ を並べ替えたものだから

$$Q = (Q_1, \dots, Q_n)$$

も順列となる。対応: $1 \mapsto P_1, \dots, n \mapsto P_n$ は対応: $Q_1 \mapsto 1, \dots, Q_n \mapsto n$ と同じものだから, 縦線を並べ替えることにより



としても横線の数是不変だから

$$\varepsilon_P = \varepsilon_Q$$

行列式

行列式の定義

以上から

$$\begin{aligned}
 (*) \text{ の左辺} &= \sum_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \varepsilon_P \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n \\
 &= \sum_Q a_{Q_1 1} a_{Q_2 2} \cdots a_{Q_n n} \varepsilon_Q \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 \circ \cdots \circ \vec{e}_n
 \end{aligned}$$

であるから

n 次行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \varepsilon_P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} = \sum_Q \varepsilon_Q a_{Q_1 1} a_{Q_2 2} \cdots a_{Q_n n}$$

ここで \sum_P は P がすべての順列を回るときの和