本日やること

1. 復習
   - 行列・基本変形・連立方程式
2. 行列式
   - 組み合わせ乗積

復習

行列・基本変形・連立方程式

$$(\star)\quad \begin{cases} 2x + y - 5z = -1 \\ x - y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = -7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\star) \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

復習

行列・基本変形・連立方程式

拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

行基本変形

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

を行っても解は変わらない。

これを利用する前ページの方法を Gauss-Jordan の消去法という.

行列式
組み合わせ乗積

[目標]
連立 1 次方程式を (行き当たりばったりでなく) 見通しよく解く方法として、

1．Gauss-Jordan の消去法

とならんで重要なものとして

2．クラメルの公式

がある。これは連立 1 次方程式の「解の公式」のようなものである。

今回はこれを導くためにベクトルの組み合わせ乗積と言うものを使う。そこには行列式というものが現れるが，これは行列と並んで線形代数の重要な概念である。

行列式

組み合わせ乗積

(I) 2 次の場合

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \iff x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{a}},\quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{b}},\quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{c}}$$

とおくと

$$(1) \Leftrightarrow (2)\quad x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}$$

これを解いて x, y を求めたい。
そのために組み合わせ乗積というものを使う。

行列式
組み合わせ乗積

組み合わせ乗積

2 次の列ベクトル $\vec{a}, b$ に対して，組み合わせ乗積 $\vec{a} \circ \vec{b}$ というものが定義され，以下の性質を満たす： 任意のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と実数 k に対して

(I) 結合法則 ：$(\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c})$,

(II) 分配法則 ：$(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}, \quad \vec{c} \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \circ \vec{a} + \vec{c} \circ \vec{b}$,

：$(k\vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (k\vec{b}) = k(\vec{a} \circ \vec{b})$

はみたすが交換法則 $(\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a})$ はみたさず

(III) $\quad \vec{a} \circ \vec{b} = -\vec{b} \circ \vec{a} \ \cdots (3)$

をみたす．したがって （$\vec{b} = \vec{a}$ を代入すると $\vec{a} \circ \vec{a} = -\vec{a} \circ \vec{a}$ となるので）

(IV) $\quad \vec{a} \circ \vec{a} = \vec{0} \ \cdots (4)$

もみたされる，という大変異常な積である．

行列式
組み合わせ乗積

[組み合わせ乗積の成分による表示]

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{e}}_1, \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{e}}_2 \quad \text{とおくと} \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$\vec{\boldsymbol{a}} = a_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\vec{\boldsymbol{e}}_2, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = b_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_2\vec{\boldsymbol{e}}_2$ だから乗積 $\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}$ は

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} &= (a_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\vec{\boldsymbol{e}}_2) \circ (b_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_2\vec{\boldsymbol{e}}_2) \\ &= a_1b_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_1b_2\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_2b_1\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_2b_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2\end{aligned}$$

さらに (3), (4) を使うと

$$= a_1b_1\vec{\boldsymbol{0}} + a_1b_2\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_2b_1(-\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2) + a_2b_2\vec{\boldsymbol{0}}$$

したがって

$$(5) \quad \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2$$

行列式

組み合わせ乗積

2 次の行列式

ここに現れる $a_1b_2 - a_2b_1$ を 2 次の行列式といい，記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ で表す．すなわち

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

また，$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A$ と表すとき $|A|$，また列ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ を用いて $|\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}|$ とも書く．したがって

$$(7) \quad \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = |\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2$$

である．

行列式

組み合わせ乗積

[注意]
じつは $\vec{a} \circ \vec{b}$ が通常の列ベクトルであると考えると, 結合法則, 分配法則と (3) を同時にみたすことはできない. $\vec{a} \circ \vec{b}$ は, 実数からはみ出した複素数のように, 「ベクトルの集合からはみ出した何か」であると（取りあえず）考えてほしい. 少し難しい議論により, そういうものが（複素数を実数からはみださせて作ったように）作れることが分かっている.

行列式
組み合わせ乗積

[連立方程式 (2) の解法]
(2) の両辺に $\vec{b}$ を右から乗積すると

$$x\vec{a}\circ\vec{b}+y\vec{b}\circ\vec{b}=\vec{c}\circ\vec{b}$$

$\vec{b}\circ\vec{b}=\vec{0}$ だから

$$(5)\qquad x\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{c}\circ\vec{b}$$

となり，y が消去できる．(7) より

$$x|\vec{a},\vec{b}|\vec{e}_1\circ\vec{e}_2=|\vec{c},\vec{b}|\vec{e}_1\circ\vec{e}_2$$

だから

$$x=\frac{|\vec{c},\vec{b}|}{|\vec{a},\vec{b}|}=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

行列式

組み合わせ乗積

同様にして y を求めよ。

行列式

組み合わせ乗積

(II) 3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とおくとき, 3 次の行列式 $|A|$ を定めよう.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

とおく. これらの乗積を

$$\vec{e}_i \circ \vec{e}_i = \vec{0}, \quad \vec{e}_i \circ \vec{e}_j = -\vec{e}_j \circ \vec{e}_i \quad (i, j \text{ は } 1, 2, 3 \text{ のどれか})$$

と定める.

行列式
組み合わせ乗積

行列 A の列ベクトル

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{は}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = a_{11}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{21}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{31}\vec{\boldsymbol{e}}_3, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 = a_{12}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{22}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{32}\vec{\boldsymbol{e}}_3,$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_3 = a_{13}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{23}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{33}\vec{\boldsymbol{e}}_3$$

と表されるから

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 =$$
$$(a_{11}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{21}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{31}\vec{\boldsymbol{e}}_3) \circ (a_{12}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{22}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{32}\vec{\boldsymbol{e}}_3) \circ (a_{13}\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{23}\vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{33}\vec{\boldsymbol{e}}_3)$$
$$\cdots (*)$$

これを展開すると $a_{i1}a_{j2}a_{k3}\,\vec{\boldsymbol{e}}_i \circ \vec{\boldsymbol{e}}_j \circ \vec{\boldsymbol{e}}_k$ の形の項が出てくる.

行列式

組み合わせ乗積

i, j, k の中に同じ番号があったら $\vec{e}_i \circ \vec{e}_j \circ \vec{e}_k = \vec{0}$ だから i, j, k がすべて異なる項のみ現れるので

$$\begin{aligned}(*) &= a_{11}a_{22}a_{33}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 + a_{11}a_{23}a_{32}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{12}a_{21}a_{33}\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31}\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_{13}a_{21}a_{32}\vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 + a_{13}a_{22}a_{31}\vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1\end{aligned}$$

乗積の隣り合う 2 つの項の順番を入れ替えると符号が変わるので

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 &= -\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \\ &= -\vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 = \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 = -\vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}&\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 \\ &\quad = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right. \\ &\qquad\quad \left. - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\right) \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3,\end{aligned}$$

行列式

組み合わせ乗積

3 次の行列式

このことにより 3 次の行列式を

$$
(8) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \ \ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}
$$

と定める．またこれを

$$
|A| \quad \text{または} \quad |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|
$$

と書くこともある．

$$
(9) \quad \vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3 = |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3,
$$

である。

行列式

組み合わせ乗積

[連立方程式の解法]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array} \right.$$

は

$$x\vec{\boldsymbol{a}}_1 + y\vec{\boldsymbol{a}}_2 + z\vec{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{これを } \vec{\boldsymbol{b}} \text{ とおく.})$$

と書けるので, 右から $\vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3$ を乗積して

$$x\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 \quad \text{したがって} \quad x = \frac{|\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|}$$

がえられる. y, z も同様である.