電気のための線形代数 B 演習問題 No.1	学生番号		

1.1.

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{cases} \quad \text{は} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{a}}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{b}}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{\boldsymbol{c}} \quad \text{とおくと}$$

$x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ となる。組み合わせ乗積を用いて y を $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ の行列式で表せ。

$\vec{\boldsymbol{a}}$ を両辺に左から乗積すると

$$\vec{\boldsymbol{a}} \circ (x\vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{c}}$$

分配法則が使えるから

$$x\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{a}} + y\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{c}}$$

$\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ だから x が消去されて

$$y\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{c}}$$

ところで (7) より

$$\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}|\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2, \quad \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{c}} = |\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{c}}|\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2,$$

したがって

$$y|\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}|\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 = |\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{c}}|\vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2$$

$$y = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{c}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}|} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

1.2. (1) 次の行列式の値を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \times 5 - 3 \times (-1) = 38$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 7 \times 3 = -23$$

(2) 組み合わせ乗積を使って解け。

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 5y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{a}}_1,\quad \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{a}}_2,\quad \begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{b}}$$

とおくとスライド 10 ページと **1.1** により

$$x=\frac{|\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{a}}_2|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2|}=\frac{\begin{vmatrix}7&3\\-1&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{7\times5-3\times(-1)}{2\times5-3\times3}=38$$

$$y=\frac{|\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{b}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1,\vec{\boldsymbol{a}}_2|}=\frac{\begin{vmatrix}2&7\\3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}}=\frac{2\times(-1)-7\times3}{2\times5-3\times3}=-23$$

がわかる.

これが後述するクラメルの解法である.

1.3. (1) 次の行列式の値を計算せよ。

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\2&1&0\end{vmatrix}=1\times2\times0+0\times1\times1+0\times(-1)\times2-1\times2\times2-0\times0\times0-1\times1\times(-1)=-3$$

(2) 組み合わせ乗積を使って解け。

$$\begin{cases} x \quad\quad + z = 3\\ \quad 2y - z = -4\\ 2x + y \quad\quad = 0\end{cases}$$

は

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{a}}_1,\quad \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{a}}_2,\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\\vec{0}\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{a}}_3,\quad \begin{pmatrix}3\\-4\\\vec{0}\end{pmatrix}=\vec{\boldsymbol{b}}$$

とおくと

$$⑦\qquad x\vec{\boldsymbol{a}}_1+y\vec{\boldsymbol{a}}_2+z\vec{\boldsymbol{a}}_3=\vec{\boldsymbol{b}}$$

と変形できる.

両辺に右から $\vec{\boldsymbol{a}}_2\circ\vec{\boldsymbol{a}}_3$ を乗積すると

$$x\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 + y\vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 + z\vec{\boldsymbol{a}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3$$

であるが

$$\vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \vec{\boldsymbol{0}}, \quad \vec{\boldsymbol{a}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = -\vec{\boldsymbol{a}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}}$$

だから

$$x\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = \vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3$$

となる。ところで

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = |\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_3 = |\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3| \vec{\boldsymbol{e}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \circ \vec{\boldsymbol{e}}_3$$

だから

$$x = \frac{|\vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

同様に7の両辺に左から $\vec{\boldsymbol{a}}_1$, 右から $\vec{\boldsymbol{a}}_3$ を乗積して

$$y = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{a}}_3|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|} = -\frac{2}{3}$$

7の両辺に左から $\vec{\boldsymbol{a}}_1 \circ \vec{\boldsymbol{a}}_2$ を乗積して

$$z = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3|} = \frac{8}{3}$$