

本日よりこと

- 1 連立 1 次方程式と行列
 - 掃き出し法と階段行列
 - 逆行列と連立 1 次方程式
 - 逆行列を用いた連立一次方程式の解法
 - 行列の階数

連立 1 次方程式と行列

復習：連立方程式・行基本変形

[復習：連立方程式・拡大係数行列]

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ とおく。拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列 \tilde{A} に対して

- (I) 1 つの行に 0 でない数をかける。
- (II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)
- (III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法

拡大係数行列 \tilde{A} において条件

- $P(i, j) : (i) a_{ij} \neq 0,$
(ii) $a_{i1} = \cdots = a_{ij-1} = 0$ ($j = 1$ のときは満たされていると考える)

を満たすとき

- $Q(i, j) : (i)$ 第 i 行を a_{ij} で割る,
(ii) 第 k 行 ($i \neq k$) から第 i 行の a_{kj} 倍を引く

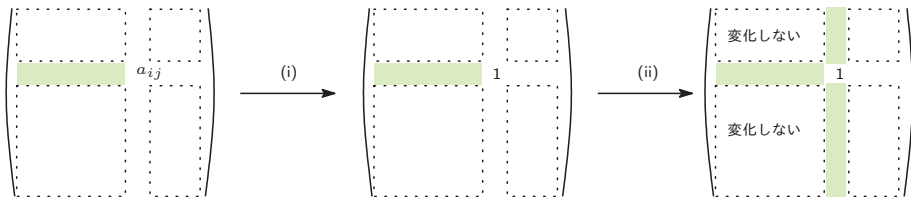
ということを行うと

$$a_{ij} \rightarrow 1, \quad a_{kj} \rightarrow 0, \quad (i \neq k), \quad \text{第 1 列から第 } j-1 \text{ 列は変化しない。}$$

のように変形される。この手続きを a_{ij} を要 (かなめ・Pivot) として第 j 列を掃き出すという。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法



(緑は成分が 0 であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法 (その 2)

この手続きを第 1 列から始めて、次のように繰り返す。

1. 最初の Pivot の選び方:

(1.1) 第 1 列の成分のうち 0 でないものを選び、行を入れ替えて第 1 行に持ってきて、これを Pivot として第 1 列を掃き出す。

(1.2) 第 1 列の成分がすべて 0 のときは、第 2 列で前項のことを行う。以下同様。

2. 前段階の Pivot が a_{ij} であるときの次の Pivot の選び方:

(2.1) $j + 1$ 列から $P(i, j + 1)$ を満たすものをさがし、行の入れ替えで $(i + 1, j + 1)$ 成分に持ってきて、これを Pivot にして第 $j + 1$ 列を掃き出す。

(2.2) $a_{i+1j+1}, \dots, a_{mj+1}$ がすべて 0 であるときは第 $j + 2$ 列に移って前項のことを行う。以下同様。

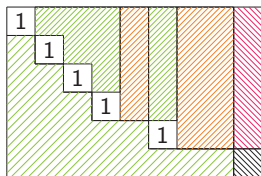
3. j が n に達したらやめる。右端の列は掃き出さない。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法 (その 3)

このことにより次のような**階段行列**



■ は 0

■ は 0 とはかぎらない

■ ■ は掃き出してはいけない

に変形することができる。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 2 \end{cases} \text{ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが, $z = t$ とおくことによりすべての解は

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

$$(2) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 3 \end{cases} \text{ の拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(2) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff A$ は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

[逆行列を用いた連立一次方程式の解法]

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

を逆行列を用いて解く

$$\iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \quad \vec{x} \quad \vec{b}$$

$$\iff A\vec{x} = \vec{b}$$

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

A が正則ならば A^{-1} をかけて

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$A^{-1}A = E$ だから右辺 $= E\vec{x} = \vec{x}$ で

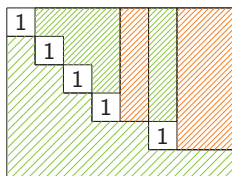
$$\iff \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

A が正則でないときは (5) は不定または不能。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

行列の階数



は 0

は 0 とはかぎらない

のような行列を階段行列という。0 でない行の数を階段行列の階数という。
 $m \times n$ 型行列 A が行基本変形により階段行列に変形されるとき、変形された
 階段行列の階数はもとの行列により決まってくる。この数を A の階数といい
 $\text{rank}(A)$ で表す。


連立 1 次方程式と行列

行列の階数

[注意] 教科書では



 は 0

 は 0 とはかぎらない

a_1, \dots, a_r は 0 でない

の形の行列を階段行列とよんでいるが、本質的に同じことで階数の定義に影響はない。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

$\text{rank}(A) < \text{rank}(\tilde{A}) \Rightarrow$ 連立方程式は解を持たない。

$\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) \Rightarrow$ 連立方程式は解を持つ。

$m = n = \text{rank}(A) \Leftrightarrow$ 連立方程式は右辺によらず常にただ一つの解を持つ。