

本日やること

- ① 連立 1 次方程式と行列
 - 掃き出し法と標準形
 - 逆行列と連立 1 次方程式

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列 \tilde{A} に対して

- (I) 1 つの行に 0 でない数をかける。
- (II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)
- (III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても対応する連立方程式の解は変わらない。この変形を**行基本変形**という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法 (その 1)

拡大係数行列 \tilde{A} において

$$a_{ij} \neq 0, \quad a_{i1} = \cdots = a_{ij-1} = 0$$

のとき

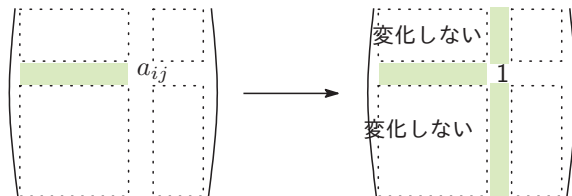
第 i 行を a_{ij} で割る, 第 k 行 ($i \neq k$) から第 i 行の a_{kj} 倍を引く
ことを行うと

$$a_{ij} \rightarrow 1, \quad a_{kj} \rightarrow 0, \quad (i \neq k) \quad \text{第 1 列から第 } j-1 \text{ 列は変化しない。}$$

のように変形される。この手続きを a_{ij} を要 (かなめ・Pivot) として第 j 列を掃き出すという。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法



(緑は成分が0であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法 (その 2)

この手続きを第 1 列から始めて、次のように繰り返す。

(I-1) 第 1 列の成分のうち 0 でないものを選び、行を入れ替えて第 1 行に持ってきて、これを Pivot として第 1 列を掃き出す。

(I-2) 第 1 列の成分がすべて 0 のときは、第 2 列で (I-1) のことを行う。以下同様。

(II-1) 前段階で a_{ij} を Pivot として第 j 列を掃き出したとする。このときは $a_{i+1j+1}, \dots, a_{mj+1}$ の中から 0 でないものを選び、行の入れ替えで $(i+1, j+1)$ 成分に持ってきて、これを Pivot にして第 $j+1$ 列を掃き出す。

(II-2) $a_{i+1j+1}, \dots, a_{mj+1}$ がすべて 0 であるときは第 $j+2$ 列に移って (II-1) のことを行う。以下同様。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不定の場合]

$$(1) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 2 \end{cases} \text{ を解きたい。拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(1) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

(1) の解は無数にあるが, $z = t$ とおくことによりすべての解は

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 1 \\ y = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

と表される。この場合を「不定」という。

連立 1 次方程式と行列

不能・不定の場合

[例：不能の場合]

$$(2) \quad \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 3y + \quad z = 3 \end{cases} \text{ の拡大係数行列を行基本変形していくと}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ となるので}$$

$$(2) \iff \begin{cases} x + \quad + 3z = 1 \\ \quad y - (2/3)z = 1/3 \\ 0x + 0y + \quad 0z = 1 \end{cases}$$

これは解を持たない。この場合を「不能」という。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

[掃き出し法による逆行列の求め方]

$$(*) \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ A \end{matrix} \begin{matrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ X \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E \end{matrix}$$

を満たす X を求めよう。

$$(*) \iff \begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases} \text{ かつ } \begin{cases} ay+bw=0 \\ cy+dw=1 \end{cases}$$

だから二つの拡大係数行列をまとめて行基本変形して

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\clubsuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ となったとすると}$$

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

である。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

$XY = E$ となる Y を求めたい。そのために ♣ と逆の行基本変形 ♠ を行うと

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\spadesuit} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}$$

となるので $Y = A$ 。したがって $XA = E$ となり $AX = E$ と合わせて $X = A^{-1}$ であることがわかる。

ただし**逆の行基本変形**というのは

- (I) 「ある行に 0 でない数 a をかける。」に対して「その行に $\frac{1}{a}$ をかける。」
- (II) 「第 i 行に実数 c をかけたものを第 j 行に加える」に対して「第 i 行に実数 $-c$ をかけたものを第 j 行に加える」
- (III) 「第 i 行と第 j 行を入れ替える」に対して「第 i 行と第 j 行を入れ替える」を逆の順序で行うこと。

まとめると

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff A$ は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。