本日やること

1. 連立 1 次方程式と行列
   - 消去法:方程式の解を変えない変形
   - ガウス・ジョルダンの消去法
   - 行列を用いた解法
   - 不能・不定の場合

連立 1 次方程式と行列

消去法

連立 1 次方程式を行列の変形を用いて系統的に解くことができる。
この方法を述べる。

連立 1 次方程式と行列

消去法

等式の変形

$A, B, C, D, k \in \mathbb{R}$ とする。

(I) $A = B,\ C = D \ \Rightarrow\ A \pm C = B \pm D$

(II) $k \neq 0$ のとき 「$A = B \ \Leftrightarrow\ kA = kB$」

連立 1 次方程式と行列

消去法

連立方程式の解を変えない変形

(I) $k \neq 0$ とするとき

(x, y, z) が $ax + by + cz = 0$ の解

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) が $k(ax + by + cz) = 0$ の解

(II) $c \in \mathbb{R}$ とするとき

(x, y, z) が $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \cdots ② \end{cases}$ の解

$\Leftrightarrow$ (x, y, z) が

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \cdots ① \\ (a_2x + b_2y + c_2z) + c(a_1x + b_1y + c_1z) = 0 \cdots ② + c① \end{cases}$ の解

連立 1 次方程式と行列

消去法

[例題] (1) から (7) の解は変わらない:

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 & \text{第 3 式と入れ替え} \\ 4x-y-z=5 & \\ x-y+2z=2 & \text{第 1 式と入れ替え} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 4x-y-z=5 & (\text{第 1 式})\times 4 \text{ をひく} \\ 3x+y-7z=0 & (\text{第 1 式})\times 3 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} x-y+2z=2 & \\ 3y-9z=-3 & \times \dfrac{1}{3} \\ 4y-13z=-6 & \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

$$(4)\quad \begin{cases} x - y + 2z = 2 & \text{(第 2 式) をたす} \\ y - 3z = -1 & \\ 4y - 13z = -6 & \text{(第 2 式)} \times 4 \text{ をひく} \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} x - z = 1 & \\ y - 3z = -1 & \\ -z = -2 & \times(-1) \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} x - z = 1 & \text{(第 3 式) をたす} \\ y - 3z = -1 & \text{(第 3 式)} \times 3 \text{ をたす} \\ z = 2 & \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 2 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

ガウス・ジョルダンの消去法

ガウス・ジョルダンの消去法

連立方程式に対して

(I) 1 つの式に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの式に実数をかけたものを他の式に加える (または引く)

(III) 2 つの式を入れ替える

ことをしても解が変わらないことを利用して

$$\begin{cases} x \qquad\qquad = * \\ \qquad y \qquad = * \\ \qquad\qquad z = * \end{cases}$$

のような形に変形する解法を**ガウス・ジョルダンの消去法**という。

連立 1 次方程式と行列

ガウスの消去法

[参考] ガウス・ジョルダンの消去法に対して

$$
\begin{cases}
x + *y + *z = * \\
\qquad y + *z = * \\
\qquad\qquad z = *
\end{cases}
$$

のような形に変形する解法を**ガウスの消去法**という。
解 x, y, z を求めるにはこの段階からさらに計算をしなくてはならないが、計算量が少なくて済むので計算機でよく使われる（そうです。）

連立１次方程式と行列

行列を用いた解法

係数行列・拡大係数行列

$$(1)\quad \begin{cases} 3x+y-7z=0 \\ 4x-y-z=5 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\|$

$\boldsymbol{A}$ とおく。**係数行列**という。

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\|$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ とおく。**拡大係数行列**という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

行基本変形

拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

ガウス・ジョルダンの消去法を係数のみ取り出して実行したことになるから明らかである。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

[例題 1]

$$(\star) \quad \begin{cases} 2x + \ y - 5z = -1 \\ \ x - \ y + \ z = \ 0 \\ 3x - 6y + 2z = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列のみに着目して行基本変形する。

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2\text{ 行と入れ替え} \\ 1\text{ 行と入れ替え} \\ \ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \ \\ 1\text{ 行を 2 倍して引く} \\ 1\text{ 行を 3 倍して引く} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2\text{ 行を } \frac{1}{3}\text{ 倍してたす} \\ \ \\ \qquad 2\text{ 行をたす} \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \ \\ \ \\ -\frac{1}{8}\text{ 倍する} \end{array}$$

連立 1 次方程式と行列

行列を用いた解法

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{3 行を } \frac{4}{3} \text{ 倍してたす} \\ \text{3 行を 7 倍してたす} \\ \ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \text{ 倍する}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから

$$(\star) \iff \begin{cases} x & & & =1 \\ & y & & =2 \\ & & z & =1 \end{cases}$$

連立 1 次方程式と行列

消去法

1. ガウスの消去法・掃き出し法は 未知数 n 個、方程式 m 個の場合でも同様にできる。
2. $n > m$ でも解がないとは限らないし $n < m$ でも解があるとは限らない。また、解は一組であるとも限らない。