

# 本日よりこと

- 1 行列
  - 逆行列

## 行列

## 逆行列

## 前回の計算問題

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -27 & 33 & -27 & 0 \\ 3 & 6 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -26 & 34 & -26 & -1 \\ 3 & 6 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行列

## 逆行列

### 逆行列の定義

$A, X$  :  $n$  次正方行列,  $E$  :  $n$  次単位行列 のとき

$X$  は  $A$  の逆行列であるとは  $AX = XA = E$  となること.

記号  $X = A^{-1}$  で表す.

数の世界では

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

$a \times x = x \times a = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$ , ( $ax \neq 0$  ならば  $a \neq 0$ , また  $a \neq 0$  なら  $\frac{1}{a}$  が  
ある)

正方行列の世界では

$$AE = EA = A$$

$AX = XA = E \Leftrightarrow X = A^{-1}$ , ( $AX \neq 0$  でも  $A \neq 0$  とは限らない。また  
 $A \neq 0$  でも  $A^{-1}$  があるとは限らない)

# 行列

## 逆行列

[注意] 正方行列  $A$  の逆行列はただ一つである。

[確かめ]  $X, Y$  を  $A$  の逆行列とする。定義より

$$XA = AX = E, \quad YA = AY = E,$$

だから

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y.$$

だから  $X = Y$  である。

# 行列

## 逆行列

2次正方行列の逆行列の存在する条件

(i)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が逆行列を持つ  $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

このとき  $A$  は**正則である**という。

(ii) このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# 行列

## 逆行列

[(i) の  $\Leftarrow$ , (ii) の確かめ]  $ad - bc \neq 0$  だから

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

同様にして

$$XA = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

したがって

$$X = A^{-1}$$

## 行列

## 逆行列

[(i) の  $\Rightarrow$  の確かめ]  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ ,  $AX = E$  とする

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} ax + bz = 1 & ay + bw = 0 \\ cx + dz = 0 & cy + dw = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} adx + bdz = d & ady + bdw = 0 \\ cbx + dbz = 0 & cby + dbw = b \end{array} \Rightarrow (ad - bc)x = d, \quad (ad - bc)y = -b$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} acx + bcz = c & acy + bcw = 0 \\ cax + daz = 0 & cay + daw = a \end{array} \Rightarrow (ad - bc)z = -c, \quad (ad - bc)w = a$$

ここで  $ad - bc = 0$  とすると  $A = 0$  となり  $(\star)$  に反するので矛盾。したがって  $ad - bc \neq 0$ .

## 行列

## 例題

[例題 6.]  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  とする.

$$AX = B \quad \left( \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \right) \cdots (\star)$$

となる  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  を求めよ.

[数の世界では]  $ax = b$  ( $a \neq 0$ ) の解  $x$  は両辺に  $\frac{1}{a}$  をかけて

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b \quad \Leftrightarrow \quad 1x = \frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

これと同じ方法が使えないか?



# 行列

## 例題

[例題 6. の解]  $(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -7 \neq 0$  だから  $A$  は正則で、 $A^{-1}$  が存在するから  $(*)$  の両辺にかけて

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \iff EX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

とすればよい。

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$X = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

# 行列

## 正則行列の積

### 正則行列の積

$n$  次正方行列  $A, B$  が正則であるとき, 積  $AB$  も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

[確かめ] 仮定より  $A^{-1}, B^{-1}$  が存在する.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

だから定義より  $B^{-1}A^{-1}$  は  $AB$  の逆行列。