

本日もやること

1 行列

- 行列の定義
- 行列の和・スカラー倍
- 行列の積

行列

行列の定義

行列の定義

行列とは

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

のように数を長方形に並べたもの

成分：行列を作っている数

行：横に並んだ成分

列：縦に並んだ成分

行列

行列の定義

行列の表示

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} :$$

m 行 n 列の行列,
または $m \times n$ 行列 という。

i 行 j 列の成分を (i, j) 成分 といい a_{ij} で表す。

第 i 行, 第 j 列

a_{ij}

i, j を添字 (suffix) という。

左の添字は行番号, 右の添字は列番号を表す。

行列

行列の定義

[例]

$(a_1 \cdots a_n) : n$ 次行ベクトル

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : n$ 次列ベクトル

も行列の一種と考える

行列

行列の定義

[特別な行列： O 行列]

すべての成分が 0 である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を O (ゼロ) 行列という。

行列

行列の定義

[特別な行列：正方行列] 行の数 = 列の数 = n である行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

を n 次正方行列という。とくに対角成分以外すべて 0 であるとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : n \text{ 次対角行列}$$

さらに対角成分がすべて 1 であるとき

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} : n \text{ 次単位行列 } \mathbf{E} \text{ で表す。}$$

行列

行列の和・スカラー倍

行列の和・スカラー倍

[和]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列どうしでないとなし算できない

[スカラー倍]

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \quad k : \text{実数}$$

ベクトルの和・スカラー倍と同じ考え方だから同じ性質を持つ

行列

復習：ベクトルの内積の成分表示

復習：ベクトルの内積の成分表示

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{平面の場合}$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{空間の場合}$$

行列

行列の積

行列の積：行ベクトル \times 列ベクトルの場合

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \left(= \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)$$

と定める。

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列

行列の積

行列の積：一般の場合

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \color{green}{a_{ij}} & \cdots & \color{green}{a_{im}} \\ a_{l1} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \color{orange}{b_{1k}} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \color{orange}{b_{mk}} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1n} \\ & c_{ik} & \\ c_{l1} & & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ik} = \color{green}{a_{i1}b_{1k}} + \color{orange}{a_{i2}b_{2k}} + \cdots + \color{green}{a_{im}b_{mk}} \left(= \sum_{j=1}^m \color{green}{a_{ij}b_{jk}} \right) \quad i = 1, \dots, l, \quad k =$$

$1, \dots, n$

で定める。 c_{ij} は第 i 行ベクトルと第 j 列ベクトルの積である。