

本日やること

① ベクトル解析

- ベクトル関数の微積分
- 曲線のパラメータ表示
- 曲面と面積分
- 球面

ベクトル解析

ベクトル関数の微積分

空間の場合で考える。

1 変数ベクトル関数

変数 t にベクトル $\vec{A}(t)$ を対応させる関数を **1 変数ベクトル関数** という。
成分表示すると

$$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

だから、**3 つの関数を 1 つに束ねたもの** と思ってよい。

これは動点の位置ベクトル, 速度ベクトル, 加速度ベクトル, 曲線のパラメータ表示などで現れる。

ベクトル解析

ベクトル関数の微積分

2 変数ベクトル関数

変数の組 (t, s) にベクトル $\vec{A}(t, s)$ を対応させる関数を **2 変数ベクトル関数** という。

成分表示すると

$$\vec{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

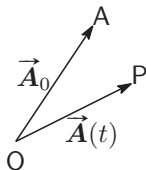
だから、**3 つの 2 変数関数を 1 つに束ねたもの**と思ってよい。

これは曲面のパラメータ表示で現れる。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の極限の定義



$\vec{A}(t) = \overrightarrow{OA}$, $\vec{A}_0 = \overrightarrow{OP}$ とするとき

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}_0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} AP = 0 \cdots (\star) \text{ と定める。}$$

$A(x_0, y_0, z_0)$, $P(x(t), y(t), z(t))$ とすると $(\star)$ は

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$$

と同値だから、**成分ごとの極限**と考えてよい。

1 変数ベクトル関数の連続性の定義

$$\vec{A}(t) \text{ が点 } t_0 \text{ で連続} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}(t_0)$$

$$\vec{A}(t) \text{ が区間 } I \text{ で連続} \Leftrightarrow I \text{ の各点で連続}$$

と定める。実は**各成分関数** $x(t), y(t), z(t)$ が連続であることと同値。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$$\vec{A}(t) \text{ が } t_0 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_0)}{\Delta t} \dots (*) \text{ が存在}$$

(*) を t_0 における微分係数ベクトルといい

$$\text{記号: } \frac{d\vec{A}}{dt}(t_0), \dot{\vec{A}}(t_0), \dots$$

で表す

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が t_0 で微分可能 $\iff x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$

要するに成分ごとに微分すればよいのです。

[確かめ]

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{(x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), y(t_0 + \Delta t) - y(t_0), z(t_0 + \Delta t) - z(t_0))}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right) \\ &\rightarrow (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \end{aligned}$$

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \vec{A}(t)$ を $\vec{A}(t)$ の導関数ベクトルという。

導関数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

ベクトル解析

2 変数ベクトル関数の微積分

[2 変数ベクトル関数]

2 変数ベクトル値関数 $\vec{A}(u, v)$ に対しても 2 変数の実数値関数と同様に極限, 連続性, を定める.

[偏微分可能性・偏導関数]

$\vec{A}(u, v)$ が (u_0, v_0) で u 偏微分可能

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{A}(u_0, v_0)}{\Delta u} \dots (*) \text{ が存在}$$

(*) を (u_0, v_0) における u 偏微分係数ベクトルといい

$$\text{記号: } \frac{\partial \vec{A}}{\partial u}(u_0, v_0), \vec{A}_u(u_0, v_0), \dots$$

で表す.

u 偏導関数を $(u, v) \mapsto \vec{A}_u(u, v)$ で定める。

v 偏微分も同様。

ベクトル解析

2 変数ベクトル関数の微積分

$$\vec{A}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

とするとき

$$\vec{A}_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)),$$

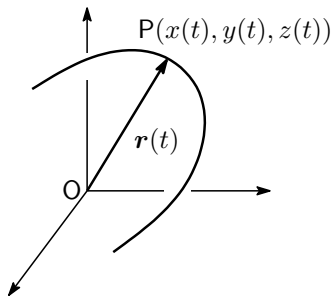
$$\vec{A}_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

となる。要するに成分ごとに偏微分すればよい。

ベクトル解析

曲線のパラメータ表示

曲線のパラメータ表示



$\vec{r}(t)$: 連続な 1 変数ベクトル値関数
であるとき

$$C : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) \quad (*)$$

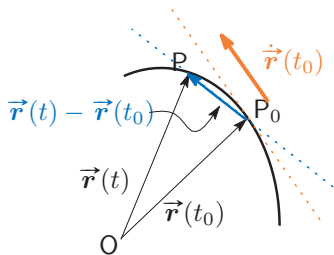
を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

(*) を **曲線 C のパラメータ表示** といい, 変数 t を **パラメータ** という。

ベクトル解析

曲線のパラメータ表示

接ベクトルの定義



$\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) を, P_0 における C の接ベクトルという.

[考え方] $t \rightarrow t_0$ とすると $P \rightarrow P_0$ となるので直線 P_0P は曲線の接線に近づくと考えられるが

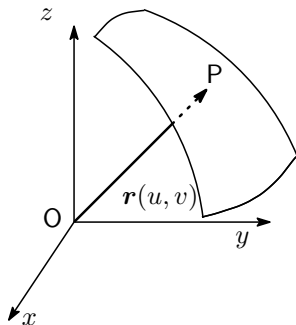
$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{P_0P}}{t - t_0}, \quad \frac{\overrightarrow{P_0P}}{t - t_0} \text{ は直線 } P_0P \text{ の方向ベクトル}$$

だから $\dot{\vec{r}}(t_0)$ は接線の方方向ベクトルとなる。

ベクトル解析

曲面のパラメータ表示

曲面のパラメータ表示



$\vec{r}(u, v)$ を連続な 2 変数ベクトル値関数と
するとき

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \cdots (*)$$

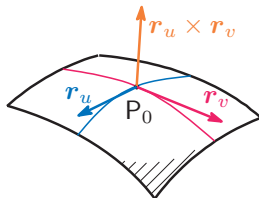
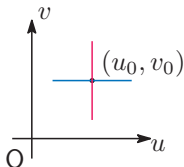
を満たす点 P の軌跡は連続な曲面になる。
これを利用して曲面を表す方法を, u, v を
パラメータとする曲面のパラメータ表示と
いう。

以後, 曲面は (*) のようにパラメータ表示
されているものとする。

ベクトル解析

曲面のパラメータ表示

u 曲線・ v 曲線・接ベクトル



u 曲線：変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡

v 曲線：変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

また, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$ とするとき, $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{0}$ でないならば

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル

$\vec{r}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

ベクトル解析

曲面のパラメータ表示

接平面・法ベクトル

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば, 点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。以後 $\vec{r}$ はこの性質を持つと仮定する。

また, 接平面に垂直ベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという。外積

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$$

はひとつの法ベクトルとなる。

ベクトル解析

曲面積

曲面積・面積要素の定義

D は u, v 平面の面積確定な有界閉領域, 曲面 S は

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

でパラメータ表示されるとき

$$S \text{ の面積} = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

と定める.

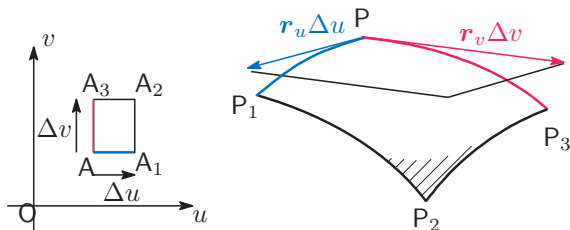
$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

を面積要素と呼ぶ.

ベクトル解析

曲面積

[考え方] (u, v) が小さい長方形領域 $AA_1A_2A_3$ を動くとき, 対応する曲面の小部分 $PP_1P_2P_3$ の面積 ΔS は



$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u, v) \doteq \vec{r}_u(u, v) \Delta u,$$

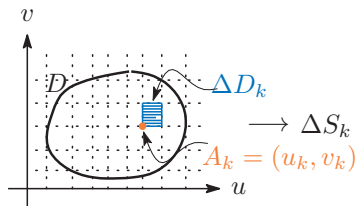
$$\overrightarrow{PP_3} = \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v) \doteq \vec{r}_v(u, v) \Delta v$$

$$\Delta S \doteq |\vec{r}_u(u, v) \Delta u \times \vec{r}_v(u, v) \Delta v| = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \Delta u \Delta v$$

のように近似されるから.

ベクトル解析

曲面積



この近似を D の長方形分割 ΔD_k すべてについて行い総和すると

$$S \doteq \sum_k |\vec{r}_u(u_k, v_k) \times \vec{r}_v(u_k, v_k)| \Delta u_k \Delta v_k$$

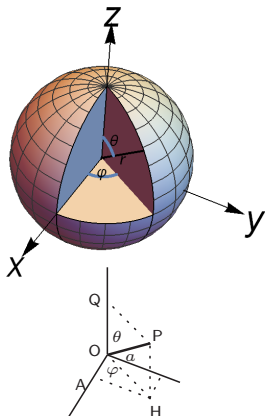
分割を細かくする極限をとって

$$\rightarrow \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

ベクトル解析

球面

球面と球面座標



S を 原点中心, 半径 a の球面とする。

$P(x, y, z) \in S$ に対して $H(x, y, 0)$, $A(x, 0, 0)$, $Q(0, 0, a)$, $\angle QOP = \theta$, $\angle AOH = \varphi$ とすると

$$\begin{cases} x = a \sin \theta \cos \varphi, \\ y = a \sin \theta \sin \varphi, \\ z = a \cos \theta, \end{cases} \quad \text{だから}$$

$$\overrightarrow{OP} = (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta)$$

(これを $= \vec{r}(\theta, \varphi)$ とおく)

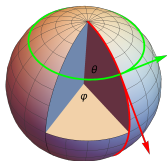
$$(0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

である。これを**球面座標表示**という。

ベクトル解析

球面

θ 曲線と φ 曲線



θ 曲線, φ 曲線は図の通り。接ベクトルは

$$\begin{aligned}\vec{r}_\theta &= ((a \sin \theta \cos \varphi)_\theta, (a \sin \theta \sin \varphi)_\theta, (a \cos \theta)_\theta) \\ &= (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, -a \sin \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_\varphi &= ((a \sin \theta \cos \varphi)_\varphi, (a \sin \theta \sin \varphi)_\varphi, (a \cos \theta)_\varphi) \\ &= (-a \sin \theta \sin \varphi, a \sin \theta \cos \varphi, 0)\end{aligned}$$

地球でたとえると

θ 曲線は南北方向, $\vec{r}_\theta$ は南向きベクトルで大きさ a

φ 曲線は東西方向で半径 $a \sin \theta$ の円, $\vec{r}_\varphi$ は東向きベクトルで大きさ $a \sin \theta$

$\vec{r}_\theta$ と $\vec{r}_\varphi$ は直交することに注意せよ。

ベクトル解析

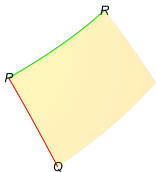
球面

球面の面積要素・球面積

 S を 原点中心, 半径 a の球面とする。面積要素 dS と球面積 S は

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$S = \int_D dS = 4\pi a^2, \quad D = \{(\theta, \varphi) | 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

点 PQR の球面座標を (θ, φ) , $(\theta + \Delta\theta, \varphi)$, $(\theta, \varphi + \Delta\varphi)$ とする。

$$\overrightarrow{PQ} \doteq \vec{r}_\theta(\theta, \varphi) \Delta\theta, \quad \overrightarrow{PR} \doteq \vec{r}_\varphi(\theta, \varphi) \Delta\varphi$$

であり, $\vec{r}_\theta$, $\vec{r}_\varphi$ で張られる長方形の面積は $a^2 \sin \theta$ だから

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

ベクトル解析

球面

$$S = \int_D dS = \iint_D a^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi = 4\pi a^2$$

ベクトル解析

面積分

スカラー場とベクトル場

D を空間の領域, P を D の点とするとき

写像 $P \mapsto f(P) \in \mathbb{R}$ をスカラー場

写像 $P \mapsto \vec{A}(P) \in \mathbb{R}^3$ をベクトル場

という。

電位, 温度, 密度等はスカラー場

電界磁界等はベクトル場

ベクトル解析

面積分

スカラー場の面積分の定義

スカラー場 $P \mapsto f(P)$ の、曲面 S 上の面積分を

$$\iint_S f(P) dS = \lim \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k$$

で定める。ただし、

ΔS_k ($k = 1, \dots, n$) : S を分割した小曲面 (およびその面積),

$P_k \in \Delta S_k$,

$\lim$ は分割を細かくする極限

S が平面領域の時は 2 重積分, $f(P) \equiv 1$ のときは S の曲面積になる。

ベクトル解析

面積分

パラメータ表示された曲面上のスカラー場の面積分

曲面 S が

$$S : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$$

となる。

考え方は曲面積の定義とほぼ同じ。

ベクトル解析

面積分

曲面の向き付け

曲面に裏表を付けることを**曲面の向き付け**という。

S の各点 P に表方向の単位法線ベクトル $\vec{n}(P)$ を対応させ、**正の向きの単位法線ベクトル** とよぶ。 (S 上のベクトル場となる)

ベクトル解析

面積分

ベクトル場の面積分の定義

S : 向き付けられた局面

$\vec{n}$: 正の単位法ベクトル

$\vec{A}(P)$: ベクトル場

に対して $\vec{A}$ の S 上面積分を

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \vec{n} \, dS = \lim \sum_{k=0}^n \vec{A}(P_k) \cdot \vec{n}(P_k) \Delta S_k$$

で定める.

$\Delta S_k, P_k, \lim$ スカラー場の面積分の場合と同じ

ベクトル解析

面積分

パラメータ表示された曲面上のベクトル場の面積分

曲面 S が 正の向きのパラメータによって

$$S : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S \vec{A} \bullet \vec{n} dS = \iint_D \vec{A} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \quad dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

と表されるからあきらかである。

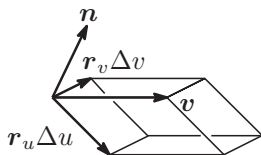
ベクトル解析

面積分

曲面を横切る流量

 $\vec{v}$ を 流体の速度ベクトルとするとき

$$F = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

は単位時間に S を横切ってわき出す流体の総量

$$S : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

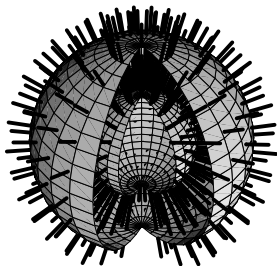
とすると S の微小部分は $\vec{r}_u du$, $\vec{r}_v dv$ で張られる平行四辺形で近似されるから, この部分を単位時間に横切る流体の総量は

$$\Delta V = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$

ベクトル解析

面積分

[例：点電荷の作る電界]



原点にある単位電荷が点 P にある単位電荷に及ぼす電気力 $\vec{E}(P)$ はベクトル場を作る。これを電界という。

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $|\vec{r}| = r$ とおくと Coulomb の法則により

$$\vec{E}(P) = k \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (k \text{ は正の定数})$$

以後簡単のため $k = 1$ とする。 $\overrightarrow{OP}$ と同じ向きで大きさは r^{-2} である。

原点中心半径 a の球面上で面積分すると、 S 上では $\vec{r} \cdot \vec{n} = r = a$ だから

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \frac{1}{a^2} \, dS = 4\pi$$