

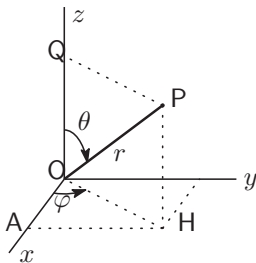
本日やること

- ① 多変数関数の積分法
 - 三重積分
 - 重積分の応用
 - 平面図形の面積
 - 立体図形の体積
 - ベクトル関数の微積分
 - 曲面と面積分

三重積分

空間の極座標変換の場合

空間の極座標変換のヤコビアン



$$(\star) \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

のときは

$$J = r^2 \sin \theta$$

三重積分

空間の極座標変換の場合

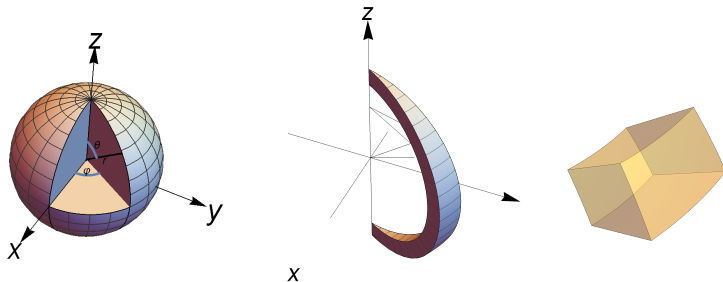
[確かめ]

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (r \sin \theta \cos \varphi)_r & (r \sin \theta \cos \varphi)_\theta & (r \sin \theta \cos \varphi)_\varphi \\ (r \sin \theta \sin \varphi)_r & (r \sin \theta \sin \varphi)_\theta & (r \sin \theta \sin \varphi)_\varphi \\ (r \cos \theta)_r & (r \cos \theta)_\theta & (r \cos \theta)_\varphi \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} \\
 &= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + r^2 \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta
 \end{aligned}$$

三重積分

空間の極座標変換の場合

直感的に理解するには：



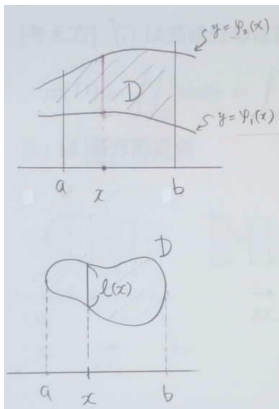
点 P の極座標 (r, θ, φ) が Δr , $\Delta \theta$, $\Delta \varphi$ 増加したとき P が動く小領域の体積は

$$(r \sin \theta \Delta \varphi) \times (r \Delta \varphi) \times \Delta r = r^2 \sin \theta \Delta \varphi \Delta \theta \Delta r$$

重積分の応用

平面図形の面積

平面図形の面積



$$(0) \quad m(D) = \int \int_D dx dy$$

$$(i) \quad D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

のときは

$$m(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx$$

(ii) さらに一般に

D : 面積を持つ有界閉領域

$\ell(x)$: D の切り口の長さ

とするときは

$$m(D) = \int_a^b \ell(x) dx$$

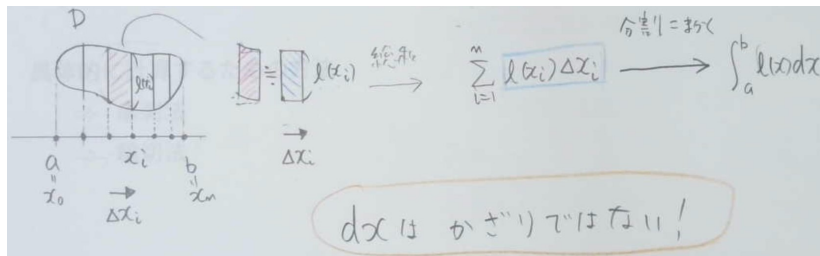
重積分の応用

平面図形の面積

[考え方] (i) は重積分の性質と累次積分による。

$$m(D) = \iint_D dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) dx$$

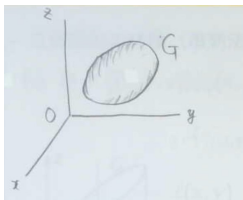
(ii) は 長方形近似



重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積



G : 体積を持つ有界閉領域
のとき体積 $V(G)$ は

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz$$

具体的に計算するための方法

⇒ 串刺法

⇒ 輪切法

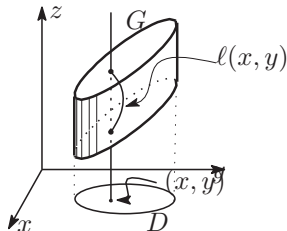
重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（串刺法）

(i) $D = \{(x, y, z) | \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\}$ のとき

$$V(G) = \iint_D (\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)) \, dxdy$$



(ii) さらに一般に

G : 体積を持つ有界閉領域

D : G の x, y 平面への正射影

$\ell(x, y)$: G の串刺の長さ

とするときは

$$V(G) = \iint_D \ell(x, y) \, dxdy$$

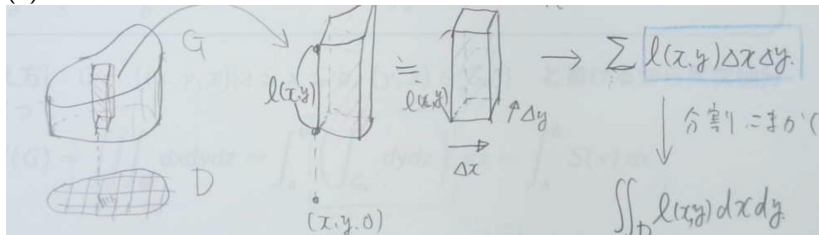
重積分の応用

平面図形の面積

[考え方] (i) は重積分の性質と累次積分による。

$$\begin{aligned} V(G) &= \iiint_G dx dy dz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz \right) dx dy \\ &= \iint_D (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y)) dx dy \end{aligned}$$

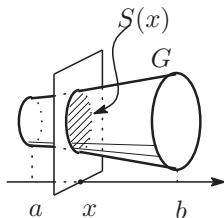
(ii) は 直方体近似



重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（輪切法）



G に属する点の x 座標は a から b まで動き、点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った断面 G_x の面積は $S(x)$ であるとするとき、

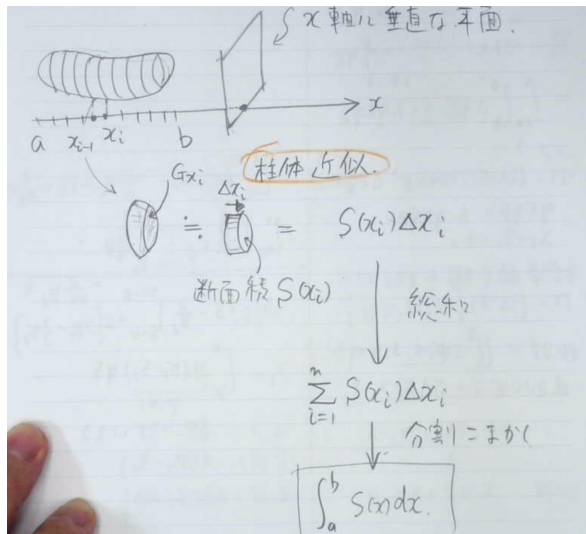
$$V(G) = \int_a^b S(x) dx$$

[考え方] $G = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, (y, z) \in G_x\}$ と書けるから累次積分によって

$$V(G) = \iiint_G dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{G_x} dy dz \right) dx = \int_a^b S(x) dx$$

重積分の応用

立体図形の体積



ベクトル解析

ベクトルの復習

空間のベクトルの外積の定義

$\vec{a}, \vec{b}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) $|\vec{c}| = \vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積
(= S とおく)

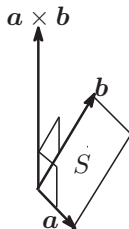
(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系

を満たすベクトル $\vec{c}$ がただ一つある。この $\vec{c}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ の **外積** といい

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

$\vec{a}, \vec{b}$ が 1 次従属ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。



ベクトル解析

ベクトルの復習

外積の成分表示

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

ベクトル解析

ベクトルの復習

[確かめ]

$\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ とおくと $\vec{c}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことを示す。

$$\vec{a} \bullet \vec{c} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

だから $\vec{a} \perp \vec{c}$. 同様に $\vec{b} \perp \vec{c}$.

$$|\vec{c}|^2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ の張る平行六面体の体積} = |\vec{c}|S$$

だから $|\vec{c}| = S$ かつ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系.

ベクトル解析

ベクトル関数の微積分

以後, 空間の場合を考える。

1 変数ベクトル関数

変数 t にベクトル $\vec{A}(t)$ を対応させる関数を **1 変数ベクトル関数**という。
動点の位置ベクトル, 速度ベクトル, 加速度ベクトル, 曲線のパラメータ表示で現れる。

成分表示すると

$$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

だから, **3 つの関数を 1 つに束ねたもの**と思ってよい。

ベクトル解析

ベクトル関数の微積分

2変数ベクトル関数

変数の組 (t, s) にベクトル $\vec{A}(t, s)$ を対応させる関数を **2変数ベクトル関数** という。

曲面のパラメータ表示で現れる。

成分表示すると

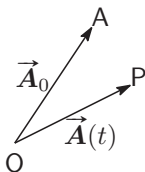
$$\vec{A}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

だから、**3つの2変数関数を1つに束ねたもの**と思ってよい。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の極限の定義



$\lim_{t \rightarrow t_0} AP = 0$ のとき $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}_0$ と定める。

実は $P(x_0, y_0, z_0)$ として

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0$$

と同値。

1 変数ベクトル関数の連続性の定義

$$\vec{A}(t) \text{ が点 } t_0 \text{ で連続} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{A}(t) = \vec{A}(t_0)$$

$$\vec{A}(t) \text{ が区間 } I \text{ で連続} \Leftrightarrow I \text{ の各点で連続}$$

実は各成分関数 $x(t), y(t), z(t)$ が連続であることと同値。

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$$\vec{A}(t) \text{ が } t_0 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_0)}{\Delta t} \dots (*) \text{ が存在}$$

(*) を t_0 における微分係数ベクトルといい

$$\text{記号: } \frac{d\vec{A}}{dt}(t_0), \dot{\vec{A}}(t_0), \dots$$

で表す

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が t_0 で微分可能 $\iff x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 要するに成分ごとに微分すればよいのです。

[確かめ]
$$\begin{aligned} & \frac{\vec{A}(t_0 + \Delta t) - \vec{A}(t_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{(x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), y(t_0 + \Delta t) - y(t_0), z(t_0 + \Delta t) - z(t_0))}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right) \\ &\rightarrow (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \end{aligned}$$

ベクトル解析

1 変数ベクトル関数の微積分

1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \vec{A}(t)$ を $\vec{A}(t)$ の導関数ベクトルという。

導関数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

ベクトル解析

2 変数ベクトル関数の微積分

[2 変数ベクトル関数]

2 変数ベクトル値関数 $\vec{A}(u, v)$ に対しても 2 変数の実数値関数と同様に極限, 連続性, **偏導関数**を定める.

[成分表示]

$$\vec{A}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

極限・連続性・偏微分可能性は 1 変数の時と同様に定める。

[偏導関数]

$$\frac{\partial}{\partial u} \vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial}{\partial v} \vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

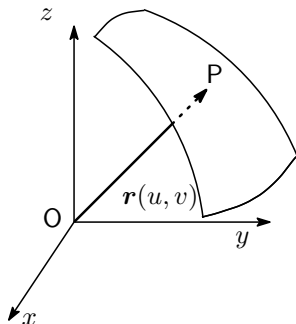
記号 $\vec{A}_u, \vec{A}_v$ を用いることもある.

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面のパラメータ表示

曲面のパラメータ表示



$\vec{r}(u, v)$ を連続な 2 変数ベクトル値関数と
するとき

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \cdots (\star)$$

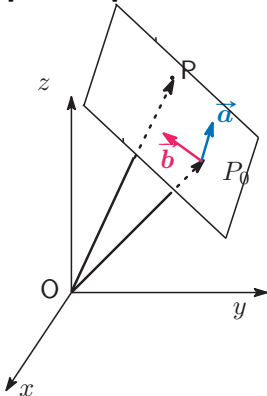
を満たす点 P の軌跡は連続な曲面になる。
これを利用して曲面を表す方法を、 u, v を
パラメータとする曲面のパラメータ表示と
いう。

以後、曲面は $(\star)$ のようにパラメータ表示
されているものとする。

ベクトル解析

曲面と面積分

[例：平面]



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + u\vec{a} + v\vec{b}$$

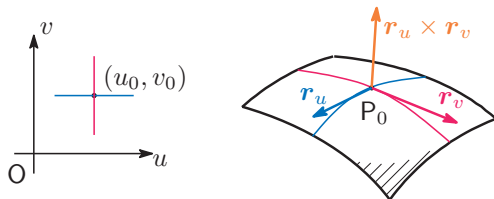
を満たす点 P の軌跡は P_0 をとおり $\vec{a}$, $\vec{b}$ で張られる平面。

$\vec{a}$, $\vec{b}$ を方向ベクトルという。

ベクトル解析

曲面と面積分

接ベクトル



u 曲線 : 変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡

v 曲線 : 変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

また, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}(u_0, v_0)$ とするとき, $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{0}$ でないならば

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル

$\vec{r}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

ベクトル解析

曲面と面積分

接平面・法ベクトル

$\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば, 点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。以後 $\vec{r}$ はこの性質を持つと仮定する。

また外積

$$\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に垂直であるが, これと同方向のベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという。

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面積の定義

D は u, v 平面の面積確定な有界閉領域, 曲面 S は

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

でパラメータ表示されるとき

$$S \text{ の面積} = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

と定める.

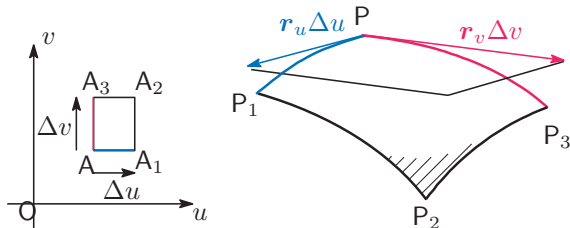
$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$$

を面積要素と呼ぶ.

ベクトル解析

曲面と面積分

[考え方] u, v が小さい長方形領域 $AA_1A_2A_3$ を動くとき, 対応する曲面の小部分 $PP_1P_2P_3$ の面積 ΔS は



$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_1} &= \vec{r}(u + \Delta u, v) - \vec{r}(u, v) \doteq \vec{r}_u(u, v) \Delta u, \\ \overrightarrow{PP_3} &= \vec{r}(u, v + \Delta v) - \vec{r}(u, v) \doteq \vec{r}_v(u, v) \Delta v\end{aligned}$$

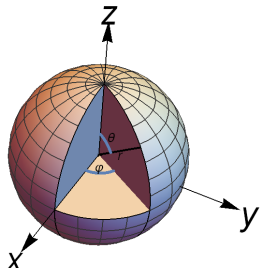
$$\Delta S \doteq |\vec{r}_u(u, v) \Delta u \times \vec{r}_v(u, v) \Delta v| = |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)| \Delta u \Delta v$$

のように近似されるから.

ベクトル解析

曲面と面積分

球面と球面座標



S を 原点中心, 半径 a の球面とするとき,
 $P \in S$ の直交座標は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta) \\ (0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)\end{aligned}$$

と表される。ただし $P(x, y, z)$, $H(x, y, 0)$,
 $A(x, 0, 0)$, $Q(0, 0, a)$ とするとき

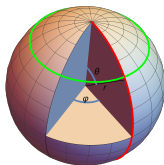
$$\angle QOP = \theta, \quad \angle AOH = \varphi$$

である。これを球面座標表示という。

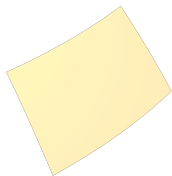
ベクトル解析

曲面と面積分

θ 曲線と φ 曲線



θ 曲線, φ 曲線は図の通り。



ベクトル解析

曲面と面積分

面積分

スカラー場の面積分の定義

スカラー場 $P \mapsto f(P)$ の曲面 S 上の面積分を

$$\iint_S f(P) dS = \lim \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta S_k$$

で定める。ただし,

ΔS_k ($k = 1, \dots, n$) : S を分割した小曲面 (およびその面積),

$P_k \in \Delta S_k$,

$\lim$ は分割を細かくする極限

S が平面領域の時は 2 重積分, $f(P) \equiv 1$ のときは S の曲面積になる。

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のスカラー場の面積分

曲面 S が

$$S : \overrightarrow{\text{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\overrightarrow{\mathbf{r}}(u, v)) |\overrightarrow{\mathbf{r}}_u \times \overrightarrow{\mathbf{r}}_v| \, du dv$$

$\{\Delta D_k\}$: D の長方形分割, $\{\Delta S_k\}$: 対応する S の分割, $\overrightarrow{\text{OP}}_k = \overrightarrow{\mathbf{r}}(u_k, v_k)$ とすると

$$\Delta S_k \doteq |\overrightarrow{\mathbf{r}}_u(u_k, v_k) \times \overrightarrow{\mathbf{r}}_v(u_k, v_k)| m(D_k)$$

$$\text{左辺} = \lim_{k=1}^n \sum f(\mathbf{P}_k) |\overrightarrow{\mathbf{r}}_u(u_k, v_k) \times \overrightarrow{\mathbf{r}}_v(u_k, v_k)| m(D_k) = \text{右辺}$$

となるからである.

ベクトル解析

曲面と面積分

曲面の向き付け

曲面に裏表を付けることを曲面の向き付けという。

S の各点 P に表方向の単位法線ベクトル $\vec{n}(P)$ を対応させ、正の向きの単位法線ベクトル とよぶ。 (S 上のベクトル場となる)

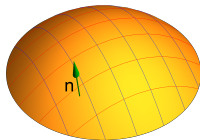
$\vec{n}(P)$ が S の全域で連続に定義できるとき、曲線は向き付け可能であるという。各点 P で $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ と $\vec{n}$ が同じ向きとなるようなパラメータ (u, v) を正の向きのパラメータと呼ぶ。

今後は、曲面はすべて向き付けられているものとし、パラメータはすべて正の向きのものとする。

ベクトル解析

曲面と面積分

ベクトル場の面積分の定義



S : 向き付けられた局面

$\vec{n}$: 正の単位法ベクトル

$\vec{A}(P)$: ベクトル場

に対して $\vec{A}$ の S 上面積分を

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \lim \sum_{k=0}^n \vec{A}(P_k) \cdot \vec{n}(P_k) \Delta S_k$$

で定める.

$\Delta S_k, P_k, \lim$ スカラー場の面積分の場合と同じ

ベクトル解析

曲面と面積分

パラメータ表示された曲面上のベクトル場の面積分

曲面 S が 正の向きのパラメータによって

$$S : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

のようにパラメータ表示されている場合は

$$\iint_S \vec{A} \bullet \vec{n} \, dS = \iint_D \vec{A} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, dudv$$

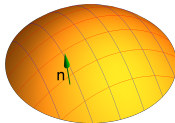
$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}, \quad dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

と表されるからあきらかである。

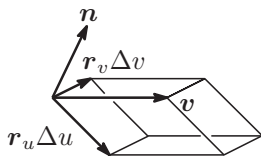
ベクトル解析

曲面と面積分

曲面を横切る流量

 $\vec{v}$ を 流体の速度ベクトルとするとき

$$F = \iint_S \vec{v} \bullet \vec{n} dS$$

は単位時間に S を横切ってわき出す流体の総量

$$S : \overrightarrow{OP} = \vec{r}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$$

とすると S の微小部分は $\vec{r}_u du, \vec{r}_v dv$ で張られる平行四辺形で近似されるから、この部分を単位時間に横切る流体の総量は

$$\Delta V = \vec{v} \bullet \vec{n} = \vec{v} \bullet (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv$$