本日やること

1. 多変数関数の積分法
   - 広義重積分法
   - 三重積分
   - 重積分の応用
     - 平面図形の面積
     - 立体図形の体積

二重積分

復習

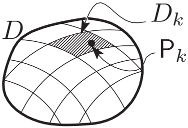
復習：二重積分の定義

D：面積をもつ有界閉領域
$f(x,y)$：D 上連続関数

のとき

$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$: D の分割
$\mathsf{P}_k \in D_k,\ k = 1, \ldots, n$

として



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k) m(D_k)$$

により二重積分を定める。ただし lim は分割を細かくする極限で $\mathcal{P}, \{\mathsf{P}_k\}$ のとりかたによらない。

具体的計算法 ＝ 累次積分法, 置換積分法 (とくに極座標変換によるもの)

広義重積分法

領域の近似列

[広義重積分]

D が有界でない, 穴が開いている

$f(x,y)$ が有界でない

場合にも重積分をしたい.

[領域の近似列の定義] 平面の領域 D に対して $\{D_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が D の近似列であるとは

各 D_n は面積を持つ有界閉領域で

$D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D$

$K \subset D$ が有界閉領域 $\Rightarrow$ ある n で $K \subset D_n$

であること。

広義重積分

定義

広義重積分の定義

D：平面の領域，$f(x,y)$：D で定義された関数，$\{D_n\}$：D の近似列　のとき

$$I = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \quad \cdots (\star)$$

が $\{D_n\}$ のとりかたによらずに決まるとき $f(x,y)$ は D 上広義 2 重積分可能であるという．このとき，I を $f(x,y)$ の D 上広義 2 重積分といい

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

で表す．

二重積分

定義

[注意] 1. D 上で $f(x,y) \geqq 0$ であるときは,

ある 1 つの近似列 $\{D_n\}$ に対して $(\star)$ が I に収束

$\Rightarrow$ すべての近似列 $\{D_n\}$ に対して $(\star)$ が I に収束するから D 上 2 重積分可能で

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

2. $|f(x,y)|$ が D 上 2 重積分可能 $\Rightarrow$ $f(x,y)$ が D 上 2 重積分可能

が知られている．このことを $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ は絶対収束するという

絶対収束する場合が重要なので, 今後はこの場合を主に考える。

二重積分

例題

例題 9.5.1　Gauss 積分

(1) $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \pi$,　　(2) $J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

[(1) の解]　$\mathbb{R}^2$ の近似列として $D_n = \{(x,y); \sqrt{x^2+y^2} \leqq n\}$ をとる.
極座標変換して
$x^2+y^2 = r^2 \quad dxdy = r\,drd\theta \quad \Omega_n = \{(r,\theta); 0 \leqq r \leqq n, -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\Omega_n} e^{-r^2} r\,drd\theta = \int_0^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r\,d\theta\right) dr$$
$$= 2\pi \int_0^n \left(e^{-r^2} r\right) dr = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2}\right]_0^n = \pi(1-e^{-n^2}) \to \pi \quad (n \to \infty).$$

したがって, $I = \pi$.

二重積分

例題

[(2) の解] $n = 1, 2, \ldots$ に対し

$$J_n = \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx, \quad E_n = \{(x, y); -n \leqq x \leqq n, -n \leqq y \leqq n\}$$

とおくと, $\{E_n\}$ は $\mathbb{R}^2$ の近似列. 一方

$$\begin{aligned} J_n^2 &= \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx\right) \times \left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_{-n}^{n}\int_{-n}^{n} e^{-x^2} \times e^{-y^2}\,dxdy = \iint_{E_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \end{aligned}$$

である. よって, (1) の結果と定理の注意より $n \to \infty$ とすると $J_n^2 \to I = \pi$, $J = \sqrt{\pi}$

二重積分

例題

例題 9.5.2

$D=\{(x,y);\ 0<x^2+y^2\leqq 1\}$ とするとき $I=\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy=-\pi$

$D_\varepsilon=\{(x,y);\varepsilon\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq 1\},\ (\varepsilon>0)$　は D の近似列．また，

$$(x,y)\in D\ \Leftrightarrow\ (r,\theta)\in\Omega=\{(r,\theta);\ 0<r\leqq 1,\ -\pi\leqq\theta\leqq\pi\},$$
$$(x,y)\in D_\varepsilon\ \Leftrightarrow\ \Omega_\varepsilon=\{(r,\theta);\ \varepsilon\leqq r\leqq 1,\ -\pi\leqq\theta\leqq\pi\}$$

極座標変換すると，

$$\begin{aligned}I_\varepsilon&=\iint_{D_\varepsilon}\log(x^2+y^2)\,dxdy\\&=\iint_{\Omega_\varepsilon}(\log r^2)r\,drd\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_\varepsilon^1(\log r^2)rdr\right)d\theta\end{aligned}$$

二重積分

例題

$s = r^2$ として置換積分すると

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varepsilon^2}^{1} \frac{\log s}{2} ds \right) d\theta = 2\pi \times \frac{1}{2} \left[s \log s - s \right]_{\varepsilon^2}^{1}$$

$s \to +0$ のとき $s \log s \to 0$ であるから $I_\varepsilon \to -\pi$. したがって, $I = -\pi$ である.

三重積分

3 変数関数の積分 (三重積分)

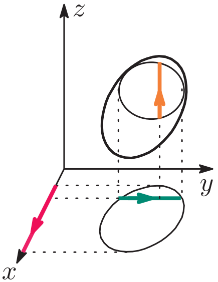
$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz, \quad D \subset \mathbb{R}^3$$

も同様に定義できて, 累次積分, 置換積分ができる.

三重積分

累次積分

三重積分の累次積分



$$D = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \\ \psi_1(x,y) \leqq z \leqq \psi_2(x,y) \end{array} \right\}$$

のとき

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

三重積分

置換積分

三重積分の置換積分

D, Ω 空間の有界閉領域, $f(x,y,z)$: D 上連続

$$(\star)\ \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) & \text{連続微分可能} \\ y = \psi(u,v,w) & \text{連続微分可能} \\ z = \chi(u,v,w) & \text{連続微分可能} \end{cases}$$

$(\star)$ で決まる $(u,v,w) \mapsto (x,y,z)$ は一対一のとき

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_\Omega f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J(u,v,w)|\,dudvdw$$

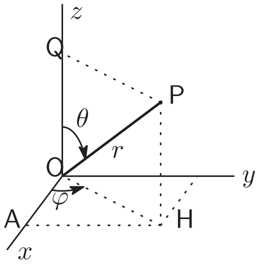
ただし, $J(u,v,w)$ は 3 変数のヤコビアンで

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} x_u(u,v,w) & x_v(u,v,w) & x_w(u,v,w) \\ y_u(u,v,w) & y_v(u,v,w) & y_w(u,v,w) \\ z_u(u,v,w) & z_v(u,v,w) & z_w(u,v,w) \end{vmatrix}$$

三重積分

空間の極座標変換の場合

空間の極座標変換のヤコビアン



$$(\star)\ \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

のときは

$$J = r^2\sin\theta$$

三重積分

空間の極座標変換の場合

[確かめ]

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (r\sin\theta\cos\varphi)_r & (r\sin\theta\cos\varphi)_\theta & (r\sin\theta\cos\varphi)_\varphi \\ (r\sin\theta\sin\varphi)_r & (r\sin\theta\sin\varphi)_\theta & (r\sin\theta\sin\varphi)_\varphi \\ (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta & (r\cos\theta)_\varphi \end{vmatrix}$$

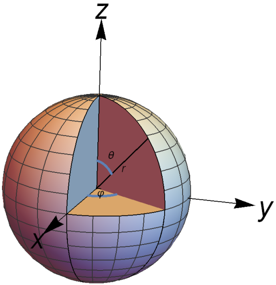
$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

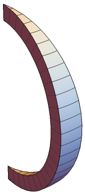
$$= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + r\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + r^2\sin^3\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

三重積分

空間の極座標変換の場合

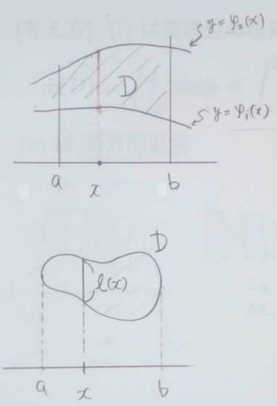




重積分の応用

平面図形の面積

平面図形の面積



(0) $m(D) = \displaystyle\int\int_D dxdy$

(i) $D = \{(x, y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$

のときは

$$m(D) = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\ dx$$

(ii) さらに一般に

D : 面積を持つ有界閉領域

$\ell(x)$: D の切り口の長さ

とするときは

$$m(D) = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

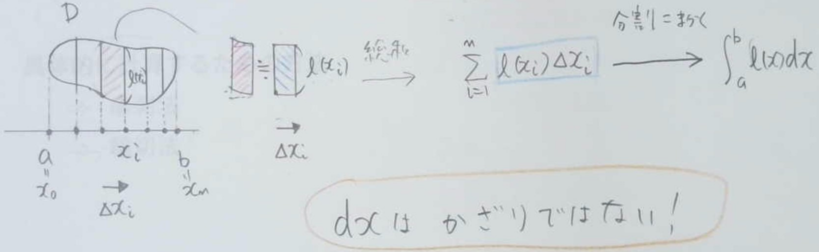
重積分の応用

平面図形の面積

[考え方] (i) は重積分の性質と累次積分による。

$$m(D) = \iint_D dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx$$

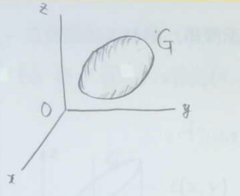
(ii) は 長方形近似



重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積



G : 体積を持つ有界閉領域

のとき体積 $V(G)$ は

$$V(G) = \iiint_G dxdydz$$

具体的に計算するための方法

$\Rightarrow$ 串刺法

$\Rightarrow$ 輪切法

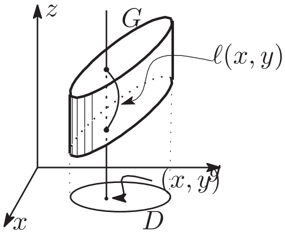
重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（串刺法）

(i) $D = \{(x,y,z)|\varphi_1(x,y) \leqq z \leqq \varphi_2(x,y),\ (x,y) \in D\}$　のとき

$$V(G) = \iint_D (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y))\, dxdy$$



(ii) さらに一般に

G：体積を持つ有界閉領域

D ： G の x,y 平面への正射影

$\ell(x,y)$：G の串刺の長さ

とするときは

$$V(G) = \iint_D \ell(x,y)\, dxdy$$

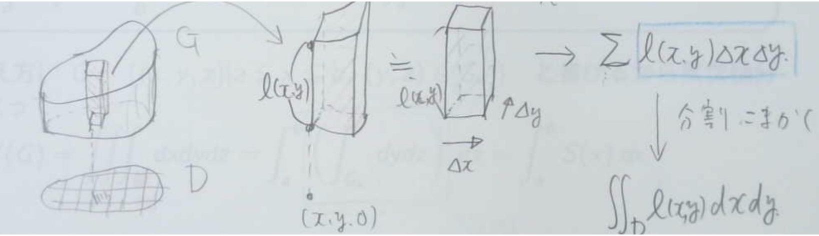
重積分の応用

平面図形の面積

[考え方] (i) は重積分の性質と累次積分による。

$$V(G) = \iiint_G dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz \right) dxdy$$
$$= \iint_D (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y))\, dxdy$$

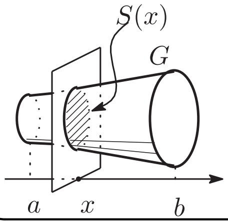
(ii) は 直方体近似



重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（輪切法）



G に属する点の x 座標は a から b まで動き，点 $(x,0,0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った断面 G_x の面積は $S(x)$ であるとするとき，

$$V(G)=\int_a^b S(x)\,dx$$

[考え方]　$G=\{(x,y,z)|a\leqq x\leqq b,\ (y,z)\in G_x\ \}$　と書けるから累次積分によって

$$V(G)=\iiint_G dxdydz=\int_a^b\left(\iint_{G_x} dydz\right)dx=\int_a^b S(x)\,dx$$

重積分の応用

立体図形の体積