

# 本日やること

- 1 2変数関数の重積分法
  - 置換積分法
    - 極座標の場合
    - 一般の変数変換の場合

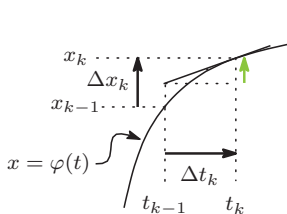
## 置換積分法

復習：定積分の場合

復習：定積分の置換積分

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

[確かめ]



$$\lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ だから } \Delta x \doteq \frac{dx}{dt} \Delta t$$

$$\sum_k f(x_k) \Delta x_k \doteq \sum_k f(\varphi(t_k)) \frac{dx}{dt} \Delta t_k$$

↓  
左辺

↓  
右辺

# 置換積分法

## 極座標変換の場合

極座標変換による置換積分法

$D$  : 面積をもつ有界閉領域  $f(x, y)$  : 連続関数 とするとき

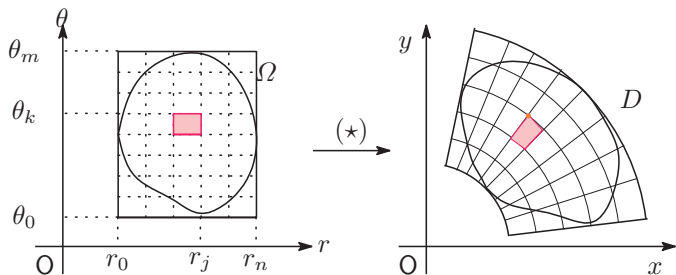
$$(*) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

ただし

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ (r, \theta) ; r \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi \ (x, y) \in D \} \\ &: (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D \text{ となるような } (r, \theta) \text{ の集合} \end{aligned}$$

## 置換積分法

極座標変換の場合



$$D_{jk} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) ; r_{j-1} \leq r \leq r_j, \theta_{k-1} \leq \theta \leq \theta_k\}$$

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1},$$

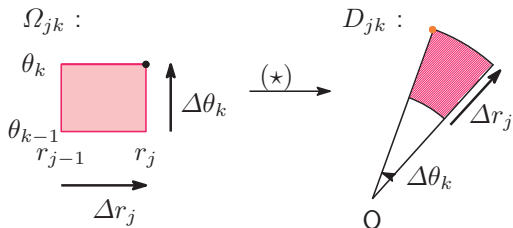
$$\Delta \theta_k = \theta_k - \theta_{k-1},$$

$$P_{jk}(r_j \cos \theta_k, r_j \sin \theta_k) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m$$

## 置換積分法

## 極座標変換の場合



$$m(D_{jk}) = r_j \Delta r_j \Delta \theta_k - \frac{1}{2} (\Delta r_j)^2 \Delta \theta_k \doteq r_j \Delta r_j \Delta \theta_k$$

$$\sum_{j,k} f(P_{jk}) m(D_{jk}) \doteq \sum_{j,k} f(r_j \cos \theta_k, r_j \sin \theta_k) r_j \Delta r_j \Delta \theta_k$$

↓

左辺

↓

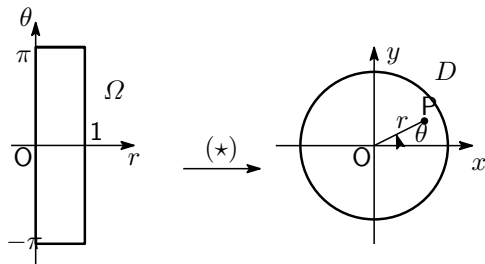
右辺

## 置換積分法

## 例題 9.4.1

$$I = \iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \quad D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$$

[解]



$$P(x, y) \in D \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1 \text{ より}$$

$$\Omega = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\text{極座標変換 } (*) \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ により}$$

$$1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r, \quad dx dy = r dr d\theta \text{ だから}$$

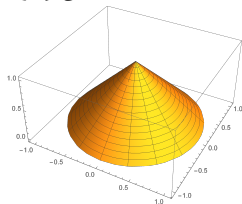
## 置換積分法

## 例題 9.4.1

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} (1-r) r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (1-r) r dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6} d\theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

□



# 置換積分法

一般の変数変換の場合

一般の変数変換による置換積分法

$D$  : 面積をもつ有界閉領域  $f(x, y)$  : 連続関数 とするとき

$$(\star) \begin{cases} x = \varphi(u, v) & \text{連続微分可能} \\ y = \psi(u, v) & \text{連続微分可能} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| \, du dv$$

ただし

$$\Omega = \{(u, v); (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in D\}$$

$D$  と  $\Omega$  は  $(\star)$  が定める写像で 1 対 1 対応する

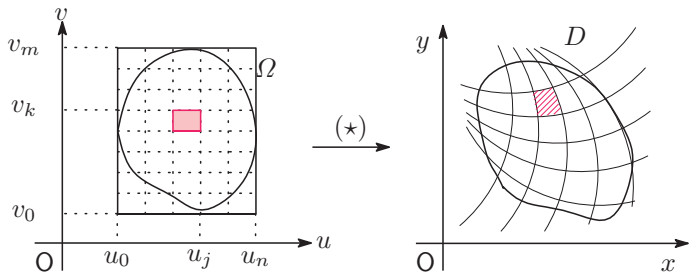
$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} : \text{ヤコビアン (Jacobian)}$$



## 置換積分法

一般の変数変換の場合

[考え方]



$$D_{jk} = \{(\varphi(u, v), \psi(u, v)) ; u_{j-1} \leq u \leq u_j, v_{k-1} \leq v \leq v_k\}$$

$$\Delta u_j = u_j - u_{j-1},$$

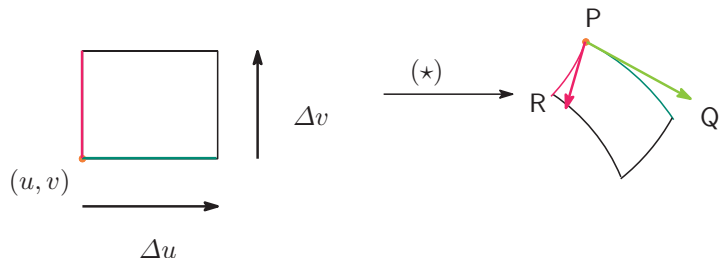
$$\Delta v_k = v_k - v_{k-1},$$

$$P_{jk}(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$$

## 置換積分法

一般の変数変換の場合



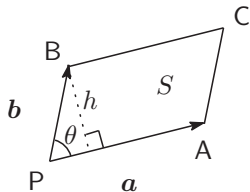
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (\varphi(u + \Delta u_j, v) - \varphi(u, v), \psi(u + \Delta u_j, v) - \psi(u, v)) \\ &\doteq (\varphi_u(u, v)\Delta u_j, \psi_u(u, v)\Delta u_j) = (\varphi_u(u, v), \psi_u(u, v))\Delta u_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (\varphi(u + \Delta v_k, v) - \varphi(u, v), \psi(u + \Delta v_k, v) - \psi(u, v)) \\ &\doteq (\varphi_v(u, v)\Delta v_k, \psi_v(u, v)\Delta v_k) = (\varphi_v(u, v), \psi_v(u, v))\Delta v_k \end{aligned}$$

## 置換積分法

一般の変数変換の場合

復習：平行四辺形の面積



PACB は  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  で張られる平行四辺形で面積は  $S$ ,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

だから

$$m(D_{jk}) \doteq \begin{vmatrix} \varphi_u(u, v) & \psi_u(u, v) \\ \varphi_v(u, v) & \psi_v(u, v) \end{vmatrix} \text{ の絶対値} \times \Delta u_j \Delta v_k$$