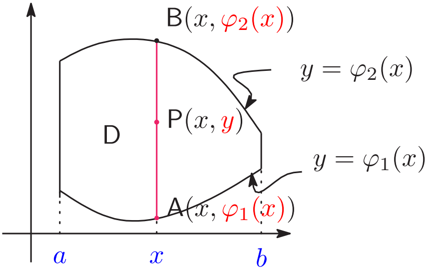
本日やること

平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合



連続関数　$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$

によって

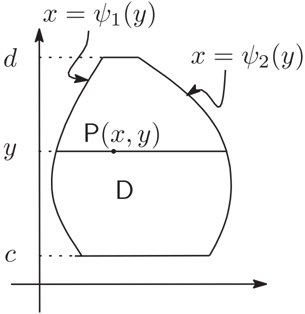
$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

のように表示される領域を縦線集合という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



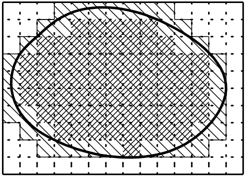
連続関数 $\psi_1(x),\,\psi_2(x)$ によって

$$D=\{(x,y)\,|\,c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\}$$

のように表示される領域を横線集合という。

平面の領域

一般の領域の面積



s : 完全に含まれる小長方形の面積和

S : 共通部分のある小長方形の面積和

一般の領域の面積

長方形分割を限りなく細かくするとき

$$\lim(S-s)=0$$

となるとき, D は面積を持つという。このとき

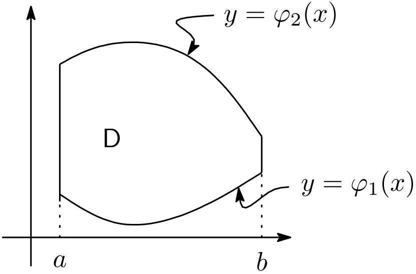
$$\lim S=\lim s$$

となるが, この量を $=m(D)$ とおき D の面積という .

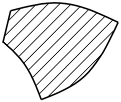
平面の領域

一般の領域の面積

[面積を持つ閉領域の例]



縦線集合，横線集合

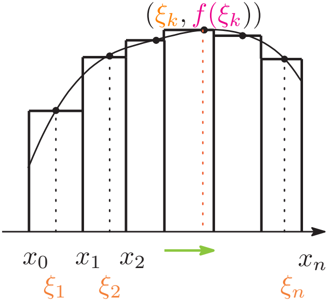


いくつかの接線を持つようになめらかな曲線で囲まれた領域

2 重積分

復習：定積分

復習 $[a,b]$ **上の** $f(x)$ **の定積分**



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$

二重積分

積分領域の分割

$D \subset \mathbb{R}^2$: 面積を持つ有界閉領域

のとき

$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ が D の分割であるとは,

(i) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$

(ii) 各 D_k は面積をもつ有界閉領域, 境界以外では互いに共通部分をもたない

であること。

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \max\{\mathrm{PQ} \mid \mathrm{P},\ \mathrm{Q} \in D_k\}$ を分割の幅という.

二重積分

定義

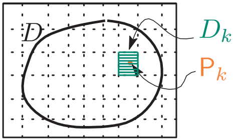
2 重積分の定義

D : 面積をもつ有界閉領域

$f(x, y)$: D 上で定義された関数

$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$: D の分割

$\mathsf{P}_k \in D_k,\ k = 1, \ldots, n$



$f(x, y)$ は D 上で積分可能であるとは $\Leftrightarrow$

$\displaystyle\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k) m(D_k)$ が $\mathcal{P}, \{\mathsf{P}_k\}$ のとりかたによらず存在すること)

この極限値を $f(x, y)$ の D 上の 2 重積分と呼び $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ で表す。

つまり $$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k) m(D_k)$$

二重積分

2 重積分の基本的性質

2 重積分の基本的性質

1. 面積をもつ有界閉領域 D 上で連続な 2 変数関数は D で積分可能である.

以後、D は面積を持ち有界閉な領域, 関数は連続とする.

2. (i) $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

   (ii) $\displaystyle\iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy$ (k は定数とする)

   (iii) D 上で $f(x,y) \leqq g(x,y) \Rightarrow \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\,dxdy$

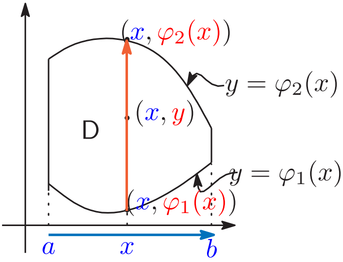
   (iv) $D = D_1 \cup D_2$ で D_1, D_2 が境界以外では共通部分をもたないならば,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

累次積分

定義

累次積分その 1



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 連続関数

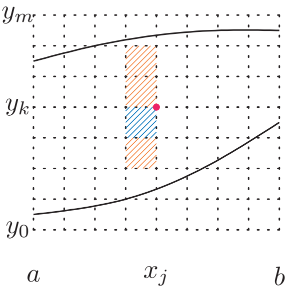
$D = \{(x, y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ 縦線集合で表示

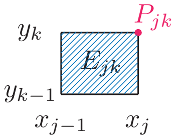
$$\Rightarrow \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

累次積分

証明

[確かめ]　長方形分割で考えてよい。





$E_{jk} \subset D$ となる j, k についての和で近似して

$$\text{左辺} \fallingdotseq \sum_{j,k} f(P_{jk}) m(E_{jk})$$

$\sum_k$ は j ごとに $E_{jk} \subset D$ となる k についての和

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_k f(x_j, y_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j$$

$$\fallingdotseq \sum_{j=0}^{n} \left(\int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y) dy \right) \Delta x_j$$

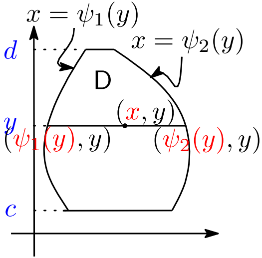
$$\fallingdotseq \text{右辺}$$

誤差は分割を細かくすると 0 に近づく。

累次積分

定義

累次積分その 2



$\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$: y の連続関数

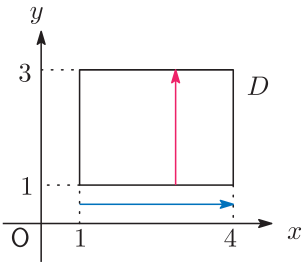
$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

横線集合で表示

$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy$$

累次積分
例題

[例題 9.3.1] $D = \{(x,y);\ 1 \leqq x \leqq 4, 1 \leqq y \leqq 3\}$ とするとき
2 重積分 $I = \displaystyle\iint_D xy\,dxdy$ を計算する.



$D = \{(x,y) \,|\, 1 \leqq x \leqq 4,\ 1 \leqq y \leqq 3\}$ だから

$$I = \int_1^4 \left(\int_1^3 xy\,dy \right) dx = \int_1^4 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=1}^{y=3} dx$$

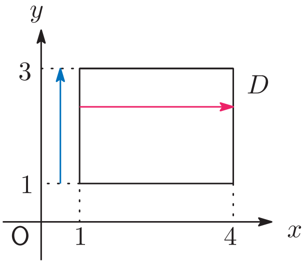
$$= \int_1^4 \frac{3^2 x - 1^2 x}{2}\,dx = \int_1^4 4x\,dx$$

$$= \left[2x^2\right]_{x=1}^{x=4} = 30.$$

累次積分

例題

[別解]



$D = \{(x, y) \mid 1 \leqq y \leqq 3,\ 1 \leqq x \leqq 4\}$ だから

$$I = \int_1^3 \left(\int_1^4 xy\, dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=1}^{x=4} dy$$

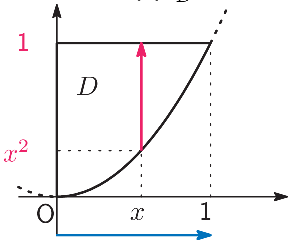
$$= \int_1^3 \frac{4^2 y - 1^2 y}{2} dy = \int_1^3 \frac{15}{2} y\, dy$$

$$= \frac{15}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=3} = 30.$$

累次積分

例題

[例題 9.3.2] $D = \{(x, y);\ 0 \leqq x \leqq 1, x^2 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき
2 重積分 $I = \iint_D xy\, dxdy$ を計算する.



$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1\}$ だから

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xy\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x^4)x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$