本日やること

本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 平面の領域
     - 領域と境界
     - 縦線集合・横線集合

その後の予定

2 変数関数の重積分法

　　平面の領域と境界

　　重積分

　　累次積分と積分の変数変換

　　面積・体積

線積分, 面積分

平面の領域

領域と境界

1 変数関数の定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

2 変数関数の重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

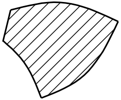
この D として許される集合は?

平面の領域

領域と境界

図形：三角形, 長方形, 円, $\cdots$

領域：「平面の, 連続な曲線で囲まれた点の集合で, 曲線上の点を含まず, 1 つにつながっているもの」



境界：領域を囲む曲線

閉領域：領域と境界をあわせたもの

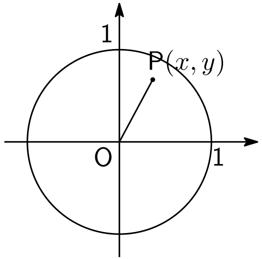
有界領域：適当な円に含まれる領域

以下, (閉) 領域を式で表示する方法を述べる.

平面の領域

例

[例]　単位円の内部



P(x, y)：円内の任意の点

OP$=\sqrt{x^2+y^2}$　だから

P(x, y) が円周上にある

$\Leftrightarrow$ OP$=1$ $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=1$

P(x, y) が円の内部にある

$\Leftrightarrow$ OP<1 $\Leftrightarrow$ $x^2+y^2<1$

したがって

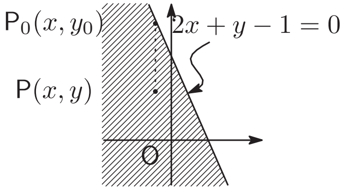
$D=\{(x, y)|x^2+y^2<1\}$：原点中心半径 1 の円の内部である領域

$G=\{(x, y)|x^2+y^2=1\}$：D の境界

平面の領域

例

[例]　直線 $2x + y - 1 = 0$ の下側である領域



$P(x, y)$: この領域内の任意の点

$P_0(x, y_0)$: P の上下方向にある点

とすると

P_0 が直線上にある

$\Leftrightarrow \quad 2x + y_0 - 1 = 0$

P が直線の下側にある

$\Leftrightarrow \quad y < y_0$

だから

$\Leftrightarrow \quad 2x + y - 1 < 0$

したがって

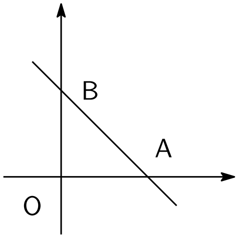
$D = \{(x, y) | 2x + y - 1 < 0\}$: 直線 $2x + y - 1 = 0$ の下側にある領域

$G = \{(x, y) | 2x + y - 1 = 0\}$: D の境界

平面の領域

例

[例]　原点 O, 点 A$(1,0)$, 点 B$(0,1)$ を頂点とする △OAB を境界とする閉領域 D :



直線 OA の上側 $= \{(x,y) \mid y \geqq 0\}$,
直線 OB の右側 $= \{(x,y) \mid x \geqq 0\}$,
直線 AB の下側 $= \{(x,y) \mid x+y \leqq 1\}$

の共通部分であるから

$$D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

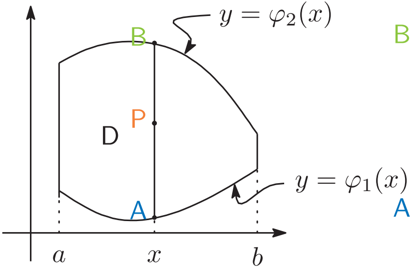
縦線集合

連続関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ によって

$a \leqq x \leqq b$

$\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)$

のように決まる領域は



B$(x, \varphi_2(x))$

P(x, y)

A$(x, \varphi_1(x))$

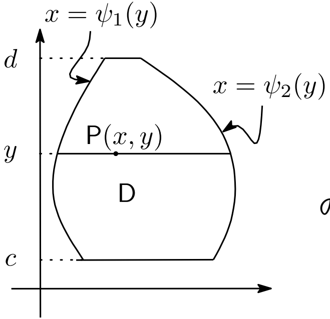
$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

このような表示法を縦線集合による表示という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



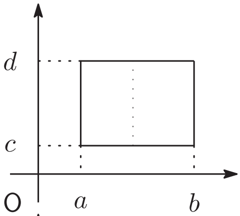
$$D = \{ (x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y) \}$$

のような表示法を横線集合による表示という。

平面の領域

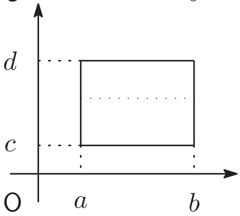
縦線集合・横線集合

例　長方形領域



縦線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$



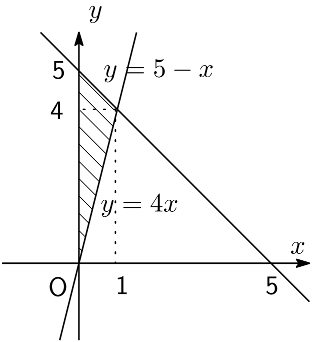
横線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ a \leqq x \leqq b\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

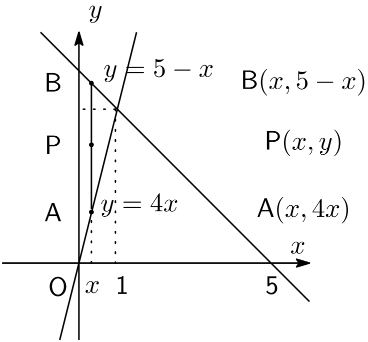
[例題 9.1.2]



平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合で表すと

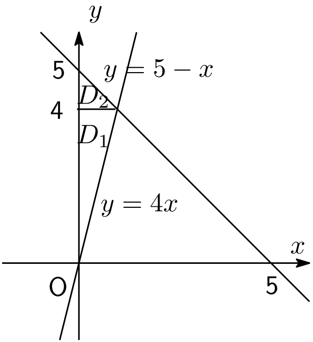


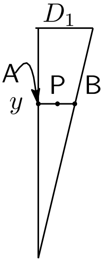
$D =$
$\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 4x \leqq y \leqq 5 - x\ \}$

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合で表すと





$y = 4x \iff x = \frac{y}{4}$ に注意して

A$(0, y)$ P(x, y) B$(\frac{y}{4}, y)$

$D_1 =$
$\{(x, y) \,|\, 0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq \frac{y}{4}\}$

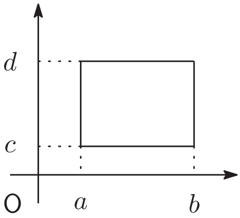
$D_2 = \{(x, y) \,|\, 4 \leqq y \leqq 5,\ 0 \leqq x \leqq 5 - y\}$

$D = D_1 \cup D_2$

平面の領域

面積

長方形の面積

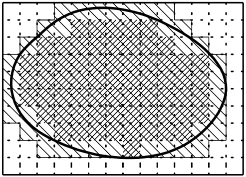


$$S = (b - a)(d - c)$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

一般の領域の面積



s :  完全に含まれる小長方形の面積和

S :  共通部分のある小長方形の面積和

面積

長方形分割を限りなく細かくするとき

$$\lim(S-s)=0$$

となるとき, D は面積を持つという。このとき

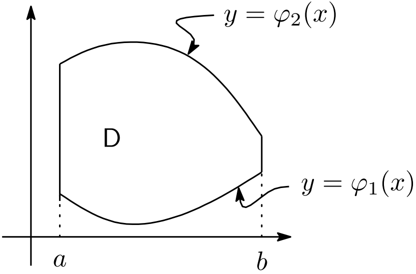
$$\lim S=\lim s$$

となるが, この量を $=m(D)$ とおき D の面積という．

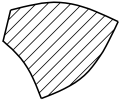
平面の領域

面積

面積を持つ閉領域の例



連続関数のグラフで囲まれた領域



いくつかの接線を持つようになめらかな曲線で囲まれた領域