

# 本日やること

- 1 2 変数関数
  - 高階偏導関数
  - Taylor 近似多項式
  - 極値問題

## 2 変数関数

### 高階偏導関数

#### 高階偏導関数

2 変数関数  $z = f(x, y)$  の偏導関数  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  がさらに偏微分可能ならば

$$(f_x(x, y))_x, (f_x(x, y))_y, (f_y(x, y))_x, (f_y(x, y))_y$$

を作ることができる。これら 4 つを **2 階 (または 2 次) 偏導関数** と呼び、記号

$$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}, \text{ または } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で表す。

同様に  $n$  階 ( $n$  次) 偏導関数 ( $n = 2, 3, \dots$ ) も定義される。これらを総称して **高階 (高次) 偏導関数** という。

関数  $z = f(x, y)$  の  $n$  次までの全ての偏導関数が存在してさらに連続関数になるとき、 $f(x, y)$  は  **$n$  回連続微分可能** であるという。1 回連続微分可能であることを単に **連続微分可能** という。

## 2 変数関数

### 高階偏導関数

[注意] 関数  $z = f(x, y)$  が  $n$  回連続微分可能のときは  $n$  次までの偏微分の順序は交換できる：

$$f_{xy} = f_{yx},$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx},$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx},$$

$$\vdots$$

## 2 変数関数

### Taylor 近似多項式

復習：1 変数関数の Taylor 近似多項式

$f(x)$  :  $n$  回連続微分可能,  $a$  : 定数

に対して  $n$  次多項式  $P(x)$  を

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

で決めると

$$f(a) = P(a), f'(a) = P'(a), f''(a) = P''(a), \cdots f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

となりその結果

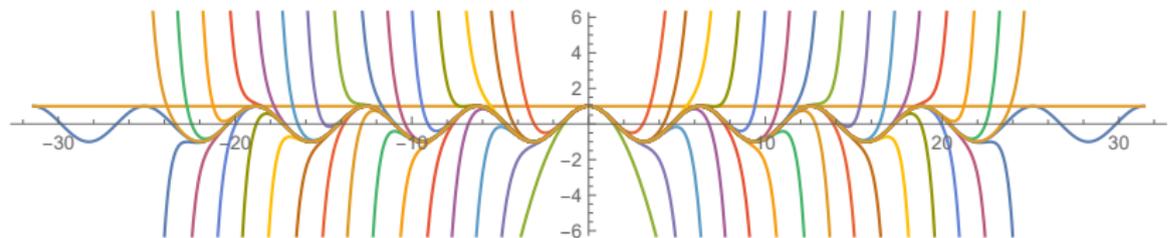
$$x \doteq a \Rightarrow f(x) \doteq P(x)$$

となることが知られている。

## 2 変数関数

### Taylor 近似多項式

[例]  $\cos x$  の 60 次までの近似多項式



## 2 変数関数

### 2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の定義

$f(x, y)$  : 2 回連続微分可能,  $a, b$  : 定数

に対して,  $f(x, y)$  の点  $(a, b)$  における 2 次の Taylor 近似多項式  $P(x, y)$  を

$$P(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

で定める。

## 2 変数関数

### 2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の性質

$P(x, y)$  は次の性質を持つ。

$$(i) \quad f(a, b) = P(a, b), \quad f_x(a, b) = P_x(a, b), \quad f_y(a, b) = P_y(a, b), \\ f_{xx}(a, b) = P_{xx}(a, b), \quad f_{xy}(a, b) = P_{xy}(a, b), \quad f_{yy}(a, b) = P_{yy}(a, b)$$

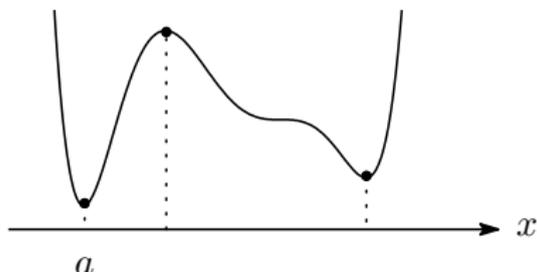
$$(ii) \quad (x, y) \doteq (a, b) \Rightarrow f(x, y) \doteq P(x, y)$$

となることが知られている。

## 2 変数関数

### 極値問題

復習：1 変数関数の極値の判定



$y = f(x)$  が 2 回連続微分可能のとき

(i) 極値の必要条件

$$a \text{ で極大 (小)} \Rightarrow f'(a) = 0$$

(ii) 極値の十分条件

$$f'(a) = 0, f''(a) < 0 (> 0) \\ \Rightarrow a \text{ で極大 (小)}$$

## 2 変数関数

### 極値問題

#### [2 変数関数の極値]

$f(x, y)$  が点  $A(a, b)$  で**極大** (または**極小**) であるとは

「ある数  $\delta > 0$  があって

$$AP < \delta, A \neq P \Rightarrow$$

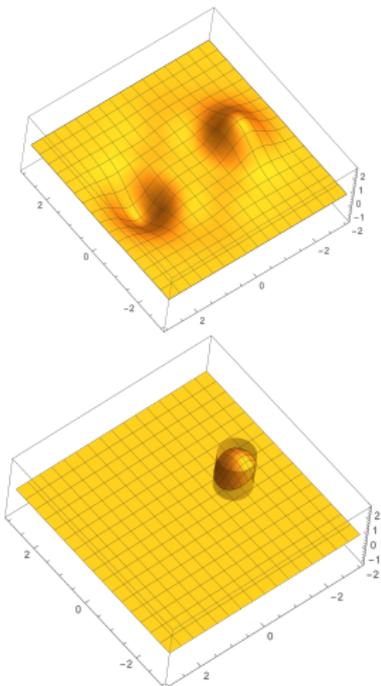
$$f(x, y) < f(a, b) \text{ (または } f(x, y) > f(a, b)\text{)}\text{」}$$

となることであると定める。

要するに、定義域を適当に小さい円に限れば点  $A$  で最大 (または最小) になるということ。

このときの値  $f(a, b)$  を**極大値** (または**極小値**) という。  
また、 $<$  を  $\leq$  (または  $>$  を  $\geq$ ) でおきかえた式が成り立つとき**広義の極大** (または**広義の極小**) になる  
といい、このときの  $f(a, b)$  の値を**広義の極大値** (または**広義の極小値**) という。

極大値と極小値をあわせて**極値**という。



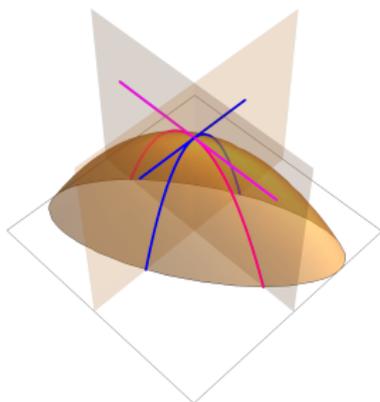
## 2 変数関数

### 極値問題

極値をとるための必要条件

$f(x, y)$  が偏微分可能のとき

$$A(a, b) \text{ で極値をとる} \Rightarrow f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$



[確かめ]

$x$  方向接線,  $y$  方向接線の傾きが 0 になるから明らかである。

## 2 変数関数

### 極値問題

#### 極値の判定法

$f(x, y)$  は 2 回連続微分可能とし,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

とする.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

とおく. このとき関数  $f(x, y)$  は

(i)  $D > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$  点  $(a, b)$  で極小.

$D > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$  点  $(a, b)$  で極大.

(ii)  $D < 0 \Rightarrow$  点  $(a, b)$  で極値をとらない.

## 2 変数関数

### 極値問題

[確かめ]

$$\begin{aligned}(x, y) &\equiv (a, b), \quad (x, y) \neq (a, b), \\ P(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \\ &\quad \text{(Taylor 近似多項式)}\end{aligned}$$

とすると

$$f(x, y) \text{ が } (a, b) \text{ で極大 (小)} \iff P(x, y) \text{ が } (a, b) \text{ で極大 (小)}$$

が分かっているので、 $P(x, y)$  の極値を調べればよいことになる。

## 2 変数関数

### 極値問題

$$h = x - a, k = y - b, \Delta f = P(x, y) - P(a, b) \left( \doteq f(x, y) - f(a, b) \right),$$

$$A = f_{xx}(a, b), B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b), C = f_{yy}(a, b)$$

とおくと

$$\Delta f = \frac{1}{2} \{ Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

という 2 次形式になる。これの符号を調べる。

行列が対称行列であることから、適当な直行行列  $T$  による変数変換

$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$  により標準形：

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ は } \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ の固有値}$$

に変形できる。

## 2 変数関数

### 極値問題

固有値は固有方程式

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda + D = 0$$

の解である。判別式は

$$(A + C)^2 - 4D = (A - C)^2 + 4B^2 \geq 0$$

だから実数解を持つ。

(i)  $D > 0$  のとき。  $AC > B^2 \geq 0$  より  $A, C$  は同符号

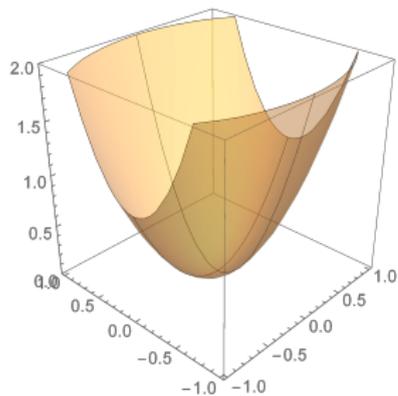
(i-i) さらに  $A > 0$  のとき 固有値はともに正。このとき恒に  $\Delta f > 0$  したがって  $(a, b)$  で極小。

(i-ii) さらに  $A < 0$  のとき 固有値はともに負。だから極大。

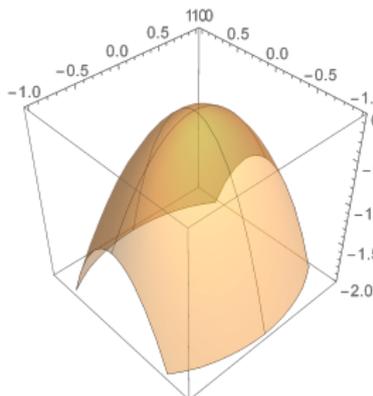
(ii)  $D < 0$  のとき。 符号の異なる 2 つの固有値を持つ。このとき  $\Delta f$  の符号は  $(\xi, \eta)$  によって変わるから極値をとらない。

# 2 変数関数

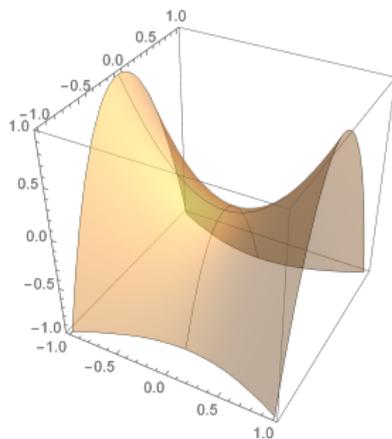
## 極値問題



(a) (i-i)



(b) (i-ii)



(c) (ii)