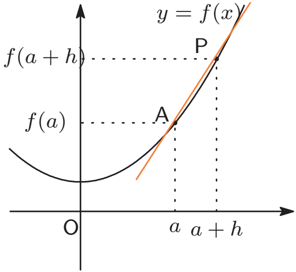
本日やること

1. 2 変数関数
   - 復習：接平面
   - 合成関数の微分法
   - 極座標

2 変数関数

復習：接平面

[復習：1 変数関数 $y=f(x)$ の微分係数]

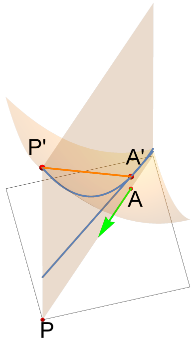


$$f'(a)=\lim_{P\to A} \text{AP の傾き} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2 変数関数

復習：接平面

[復習：2 変数関数 $z = f(x, y)$ の $\boldsymbol{u}$ 方向微分係数]



A(a, b) を定点, $\boldsymbol{u}$ を 大きさ 1 のベクトル, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\boldsymbol{u}$ とする。$\boldsymbol{u}$ 方向に A を原点として座標軸をおくとき s は P の座標となる。

$$\boldsymbol{u} \text{ 方向微分係数} = \lim_{P \to A} \text{A'P' の傾き} = \lim_{s \to 0} \frac{f(P) - f(A)}{s}$$

$f(x, y)$ が連続微分可能ならばすべての方向に方向微分可能で

$$\boldsymbol{u} \text{ 方向微分係数} = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

ただし $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i) $z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "t_x"] & & \\ & t \arrow[r, "z_t"] & z \\ y \arrow[ur, "t_y"'] & & \end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例] $z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y \cos(xy)$$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "x_u"] \arrow[dr, "y_u"' near start] & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ & & z \\ v \arrow[r, "y_v"'] \arrow[ur, "x_v" near start] & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]
t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}\Delta x &= \varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\\ \Delta y &= \psi(t+\Delta t)-\psi(t)\\ \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\end{aligned}$$

だけ変化する．ここで Lagrange の平均値の定理を使って方向微分と同様の議論をすると，

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)\Big)+\Big(f(x, y+\Delta y)-f(x,y)\Big)\\ &= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\\ &\qquad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1\end{aligned}$$

となる数 θ_1, θ_2 がある．

2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]
この両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$
$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) \to f_x(x,y) = z_x, \qquad f_y(x, y+\theta_2\Delta y) \to f_y(x,y) = z_y$$

となるので

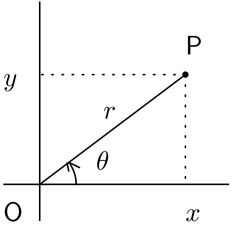
$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

2 変数関数

平面の極座標

平面の極座標



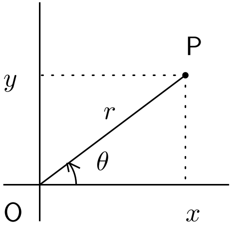
P の直交座標：(x, y)

P の極座標：(r, θ)

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 1



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だから

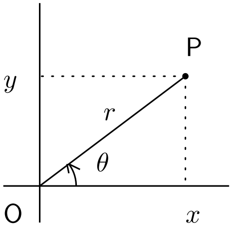
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 2



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$