

本日より

- ① 2 変数関数
 - 復習・例
 - 偏微分係数の図形的意味

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ とは,
 y を定数と見なして $f(x, y)$ を x のみの関数と考えて x で微分して
できる関数である。

y に関する偏導関数も同様に定める。

1 変数関数と同じ規則に従って計算できる。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 5.] **重要!!** 距離を表す関数

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ のとき $x^2 + 1 = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} \sqrt{t} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

(2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のとき $x^2 + y^2 = t$ において合成関数の微分法を使うと

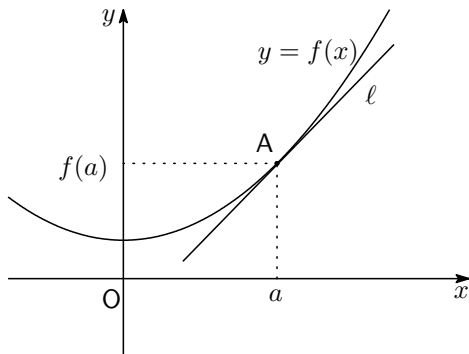
$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_y = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



微分係数は接線の傾き！

$A(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾きは
 $= f'(a)$

だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f'(a)$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

偏微分係数の図形的意味を $f(x, y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 2$ の場合で説明する。

$z = f(x, y) \cdots \textcircled{1}$ のグラフは

点 $P(x, y, f(x, y))$ (x, y は任意の実数)

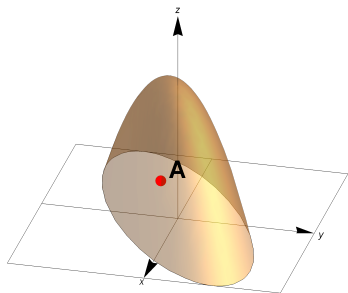
をすべて集めたもの。だからグラフ上の $x = 1, y = 0$ である点 A の座標は

$$f(1, 0) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + 2 = 1$$

だから

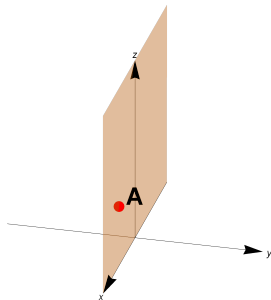
$$A(1, 0, 1)$$

$(1, 0)$ における x に関する偏微分係数 $f_x(1, 0)$ を図形的に調べる。



2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



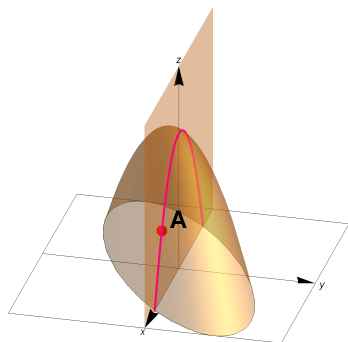
y 座標を 0 に固定した点

$(x, 0, z)$, (x, z は任意の実数)

をすべて集めたものは, 図のように A を通り
 y 軸に垂直な平面となる。これを P_x とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



①のグラフと平面 P_x の共通部分は

$$z = f(x, y), \quad y = 0$$

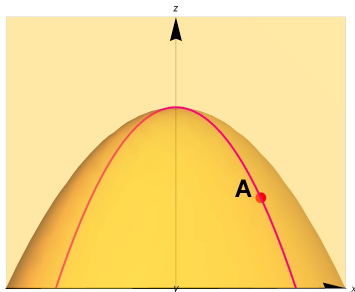
を両方満たすから

$$z = f(x, 0), \quad y = 0, \quad (x \text{ は任意の実数})$$

を満たし図のような曲線となる。これを C_x とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



C_x を y 軸の負の方向から眺めると図のようになる。これは xz 平面で 1 変数関数

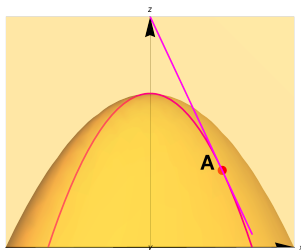
$$z = f(x, 0) = -x^2 + 2$$

のグラフになっている。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

この曲線 C_x に点 A で接線を引いてみよう。1 変数関数の考え方を使って



接線の傾き

$$\begin{aligned} &= \left((-x^2 + 2) \text{ の } x = 1 \text{ における微分係数} \right) \\ &= (-2x)|_{x=1} = -2 \end{aligned}$$

接線の方程式は

$$z = -2(x - 1) + 1 = -2x + 1$$

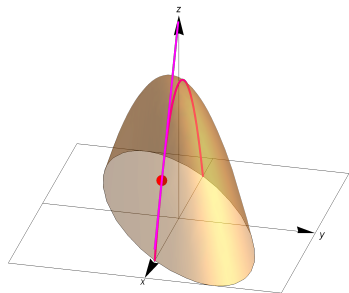
これを L_x とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

C_x L_x を空間内で眺めると図のようになる。

L_x を①のグラフの **A** における x 方向接線とよぶ。



まとめると, x 方向接線の傾きの計算は,

(1) $z = f(x, y)$ に, 「 $y = 0$ 代入」

(2) 「 x で微分」

(3) 「 $x = 1$ 代入」

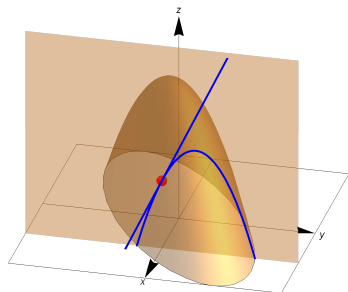
したことになるが, これは x に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$x \text{ 方向接線の傾き} = f_x(1, 0) = -2$$

であることが分かる.

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



y についても同様に

(1) $z = f(x, y)$ に, 「 $x = 1$ 代入」

(2) 「 y で微分」

(3) 「 $y = 0$ 代入」

すれば y に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$y \text{ 方向接線の傾き} = f_y(1, 0) = 2$$

であることが分かる.

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

偏微分係数の図形的意味

$f(x, y)$ が偏微分可能であるとき, $z = f(x, y)$ のグラフの曲面において

$A(a, b, f(a, b))$ における x 方向接線の傾き $= f_x(a, b)$,

$A(a, b, f(a, b))$ における y 方向接線の傾き $= f_y(a, b)$.