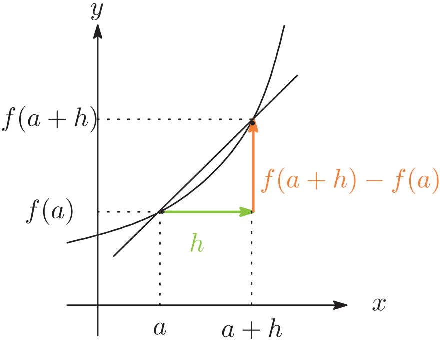
本日やること

1. 2 変数関数
   - 偏微分係数・偏導関数

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[復習：1 変数関数の微分係数]



$y=f(x)$：1 変数関数　a：定数
のとき

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

：a における微分係数

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏微分係数の定義

$z = f(x,y)$ を 2 変数関数, A(a,b) を定点とするとき, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ は点 A(a,b) で x に関して偏微分可能であるとは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \quad \cdots (\star)$$

が存在すること。
$(\star)$ を点 A$(a.b)$ における $f(x,y)$ の x に関する偏微分係数とよび, 記号

$$f_x(a,b), \ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}, \cdots$$

で表す。

y に関する偏微分係数も同様に定める。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\clubsuit)$$

と

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \cdots (\star)$$

を比較すると,

$(\star)$ は y を定数 b に固定して, $f(x, b)$ を x のみの 1 変数関数とみて微分したもの

ということができる。

2 変数関数
偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏導関数の定義

(i) 関数 $z = f(x, y)$ が集合 D の各点で偏微分可能であるとき, D で偏微分可能であるという.

(ii) $(x, y) \in D$ に対して微分係数 $f_x(x, y)$ が決まるが, これによって決まる関数

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

を $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数と呼び, 記号

$$f_x(x, y), \quad \bigl(f(x, y)\bigr)_x, \quad f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

などで表す. y に関する偏導関数も同様に定める。

(iii) 偏導関数を求めることを偏微分するという.

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1.]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ $(a,\ b$ は定数$)$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき 正解は？

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + 2y\ ?$$
$$f_x(x, y) = 2x + y + y^2\ ?$$
$$f_x(x, y) = 2x + 1 + y^2\ ?$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1 の正解]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3 + 0.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a + 0.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき y を定数と見て x で微分して

$$f_x(x, y) = (x^2)_x + (x)_x y + (y^2)_x = 2x + y + 0.$$

(3)' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき x を定数と見て y で微分して

$$f_y(x, y) = (x^2)_y + x(y)_y + (y^2)_y = 0 + x + 2y.$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

偏微分法では, 1 変数関数の微分法の計算方法がすべて使える.

[例 2.] 合成関数の微分法が使える.

合成関数の微分法を復習しよう。

記号 $f'(x)$ のかわりに $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を使う。同じ意味！。

(1) $f(x)=(2x+3)^4$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x+3)^4 \\ &= \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{d}{dx}(2x+3) \\ &= 4t^3 \times 2 = 8(2x+3)^3 \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

(2) $f(x,y)=(2x+3y)^4$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \left((2x+3y)^4\right)_x \\
&= \left(t^4\right)_x = \left(t^4\right)_t \times t_x \\
&= \left(t^4\right)_t \times (2x+3y)_x = 4t^3 \times 2 = 8(2x+3y)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \left((2x+3y)^4\right)_y \\
&= \left(t^4\right)_y = \left(t^4\right)_t \times t_y \\
&= \left(t^4\right)_t \times (2x+3y)_y = 4t^3 \times 3 = 12(2x+3y)^3
\end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 3.]

(1) $f(x) = \sin(2x+3)$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{d}{dx}(2x+3) = 2\cos(2x+3)$$

(2) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\sin(2x+3y))_x = (\sin t)_x \\ &= (\sin t)_t \times t_x = (\sin t)_t \times (2x+3y)_x = \cos t \times 2 = 2\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\sin(2x+3y))_y = (\sin t)_y \\ &= (\sin t)_t \times t_y = (\sin t)_t \times (2x+3y)_y = \cos t \times 3 = 3\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 4.] 積の微分法を使うことができる.

(1) $f(x,y) = xy\sin(2x+3y)$ のとき 積の微分法により

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (xy)_x \sin(2x+3y) + xy\left(\sin(2x+3y)\right)_x \\ &= y\sin(2x+3y) + xy\left(2\cos(2x+3y)\right) \\ &= y\sin(2x+3y) + 2xy\cos(2x+3y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (xy)_y \sin(2x+3y) + xy\left(\sin(2x+3y)\right)_y \\ &= x\sin(2x+3y) + xy\left(3\cos(2x+3y)\right) \\ &= x\sin(2x+3y) + 3xy\cos(2x+3y). \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 5.] 重要!! 距離を表す関数

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ のとき $x^2+1=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{t}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\times\frac{d}{dx}(x^2+1)=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ のとき $x^2+y^2=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f_x(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x$$

$$=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times t_x=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times(x^2+y^2)_x=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y$$

$$=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times t_y=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times(x^2+y^2)_y=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$