本日やること

1. ガイダンス

2. 2 変数関数
   - 2 変数関数とは何か
   - 2 変数関数のグラフ
   - 平面と 1 次関数

ガイダンス

電気のための微分積分 D

内容
(1) 2 変数関数の偏微分法, 曲面と接平面, 極値問題
(2) 2 変数関数の重積分法
(3) 線積分, 面積分ベクトル解析

評価方法
中間試験, 期末試験, 課題

2 変数関数

定義

[復習：1 変数の関数 f]

実数に対して実数を対応させる働き

$$f \ : x \mapsto y$$
$$y = f(x)$$

例： $y = x + 1,$

$y = x^2,$

$y = \sin x,$

[2 変数の関数 f]

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f \ : (x, y) \mapsto z$$
$$z = f(x, y)$$

例：縦横の長さがそれぞれ x, y である長方形について

$\ell = 2(x + y)$, 周の長さ

$S = xy$, 面積

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 対角線の長さ

$\vdots$

2 変数関数

定義

[n 変数の関数 f]

n 個の実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f \ : \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto z$$
$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$: 独立変数 z : 従属変数

$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が定義される $\}$: 定義域

$f(D) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) | f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$: 値域

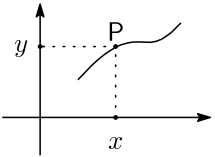
2 変数関数
グラフ

[復習：1 変数関数のグラフ]

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフとは

$$\{(x, y) \,|\, y = f(x), x \in D\}$$

のこと。 (D は定義域)



点 P(x, y) がグラフ上にある $\iff$ $y = f(x)$

f が連続関数ならば曲線となる。

2 変数関数

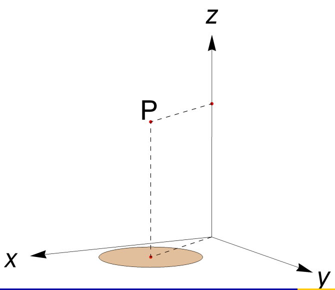
グラフ

2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \,|\, z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

のこと。 (D は f の定義域)



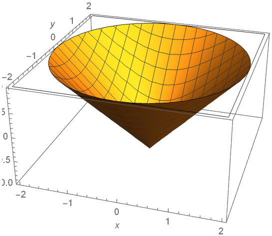
2 変数関数

グラフ

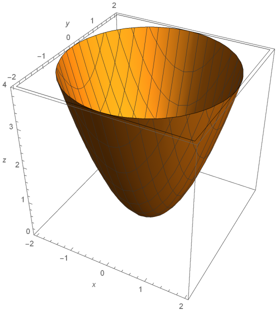
[グラフの目的]

1. グラフを用いると関数の値の変化の様子がよく分かる。

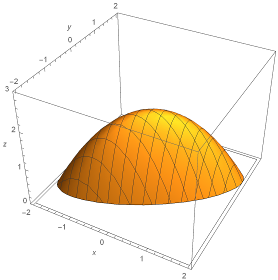
2. 図形をある関数のグラフと見ることにより, 図形の性質を関数の計算によって調べることができる。



(a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



(b) $z = x^2 + y^2$

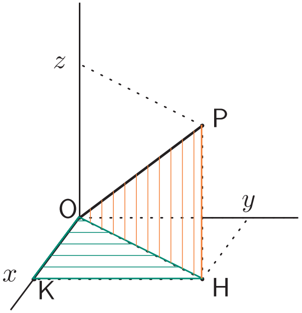


(c) $z = 2 - x^2 + 2xy - 2y^2$

2 変数関数

グラフ

[準備：空間の点と原点の距離]



P(x, y, z), H$(x, y, 0)$, K$(x, 0, 0)$ とおく。
△OKH, △OHP に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HP}^2$$
$$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{KH}^2 + \mathrm{OK}^2$$

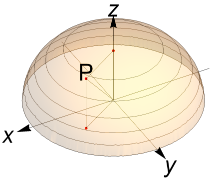
だから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2 &= \mathrm{OK}^2 + \mathrm{KH}^2 + \mathrm{HP}^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \mathrm{OP} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

2 変数関数

グラフ

[例 8.4] $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフをかく。
ただし定義域は $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqq 1\}$



グラフ上の点を P(x,y,z) とおくと

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ だから

$$\iff \quad x^2+y^2+z^2=1,\quad z\geq 0$$

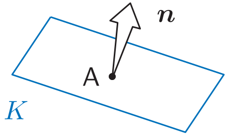
$$\iff \text{OP}=1,\ z\geqq 0$$

だから P は原点中心半径 1 の球面の上半分の上にある．したがってグラフは原点中心半径 1 の球面である。

$(x,y)\in D$ でないと $f(x,y)$ が定義できないことに注意。

2 変数関数
平面と 1 次関数

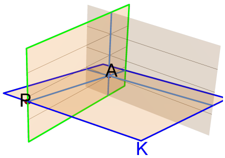
平面の方程式



(i) 点 A(a,b,c) を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}=(\alpha,\beta,-1)$ と垂直な平面 K の方程式は

$$z-c=\alpha(x-a)+\beta(y-b)\cdots(\star)$$

である．

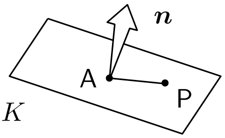


(ii) K と 平面 $y=b$ が交わってできる直線の傾き (これを x 方向傾きという) は α である。同様に y 方向傾きは β である．

平面 $y=b$ は A を通って y 軸に垂直な平面である。

2 変数関数

平面と 1 次関数



[確かめ] (i) $\mathrm{P}(x, y, z)$: K 上の A でない任意の点とする。

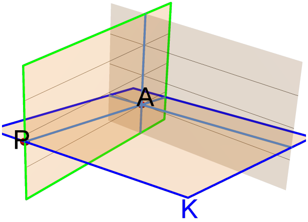
$$\text{P は } K \text{ 上にある.} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ldots (\star\star)$$

である. また $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a, y-b, z-c)$ であるから

$$\begin{aligned}(\star\star) &\iff (x-a, y-b, z-c) \bullet (\alpha, \beta, -1) = 0 \\ &\iff \alpha(x-a) + \beta(y-b) - (z-c) = 0 \\ &\iff (\star)\end{aligned}$$

だから K の方程式は $(\star)$ である.

2 変数関数
平面と 1 次関数



(ii) P(x, y, z) を，A(a, b, c) から K 上で y 座標は b のまま変えずに x 軸方向に移動させた点とする。(z 座標は変化する。)
x, y, z は $\star$ を満たすからこれに $y = b$ を代入すると

$$z - c = \alpha(x - a)$$

したがって

$$\alpha = \frac{z - c}{x - a}$$

だから AP の傾きは α。

2 変数関数

平面と 1 次関数

2 変数の 1 次関数のグラフ

(i) 1 次関数 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ のグラフは平面である。

(ii) この平面はベクトル $\boldsymbol{n} = (\alpha, \beta, -1)$ に垂直であり, x 方向傾きは α, y 方向傾きは β である。

[確かめ] $f(x, y) = z$ とおくと

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \quad \Longleftrightarrow \quad z - \gamma = \alpha(x - 0) + \beta(y - 0)$$

だから前に述べたことからわかる。