電気のための微分積分 D 演習問題 No.13 解答

1. 2 つのベクトル $\vec{\boldsymbol{a}} = (1, 2, 3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (2, 0, -1)$ に対し，次の値およびベクトルを求めよ.

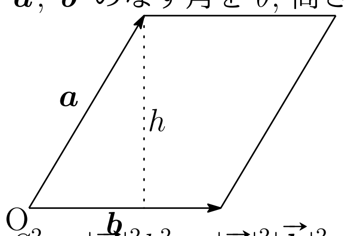
(1) $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right)$
$= (2 \times (-1) - 3 \times 0, 3 \times 2 - 1 \times (-1), 1 \times 0 - 2 \times 2) = (-2, 7, -4)$.

(2) $\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right)$
$= (3 \times 0 - 2 \times (-1), 1 \times (-1) - 3 \times 2, 2 \times 2 - 1 \times 0) = (2, -7, 4)$.

(3) $(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = (-2, 7, -4) \bullet (1, 2, 3) = -2 + 14 - 12 = 0$. だから直交する.

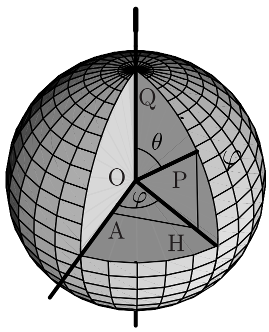
(4) 面積を S とおくと $S = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{69}$ がひとつの答え.

次のように直接面積を計算しに行ってもよい。
$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ のなす角を θ, 高さを h とする.



$S^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 h^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 \sin^2\theta$
　$(\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だから$)$
$= |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 - (|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\cos\theta)^2 = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2 |\vec{\boldsymbol{b}}|^2 - (\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})^2 = 14 \times 5 - (-1)^2 = 69$.
だから $S = \sqrt{69} = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}|$.

2 (1) 原点中心半径 $a > 0$ の球面を S で表す. S 上の点 P の球面座標 θ, φ によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を表わせ. (これを $= \boldsymbol{r}(\theta, \varphi)$ とおく.) また θ, φ の値の取りうる範囲を書け.



P から xy 平面に引いた垂線と xy 平面の交点を H とする．$\mathrm{OH} = a\sin\theta$ である．P の直角座標を (x, y, z) とすると

$x = \mathrm{OH}\cos\varphi = a\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \mathrm{OH}\sin\varphi = a\sin\theta\sin\varphi,$

$z = a\cos\theta$

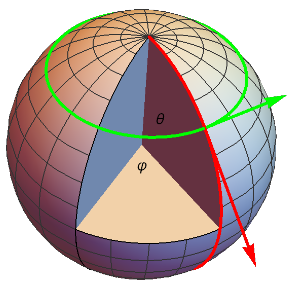
であり，また $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ だから

$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$

ただし θ, φ の動く範囲は

$0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$

(2) 図を地球儀に見立てよう．φ を一定として θ だけを変化させると点 P は北極から南極に向かって南北方向に動く．だから θ 曲線は P を通る経線である．θ を一定として φ だけを変化させると点 P は xy 平面に平行に東西方向に動く．だから φ 曲線は P を通る緯線である．



(3) $\boldsymbol{r}(\theta, \varphi)$ を偏微分して得られるベクトル $\boldsymbol{r}_\theta$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示し，図中に書き入れよ．

$\boldsymbol{r}_\theta = ((a\sin\theta\cos\varphi)_\theta, (a\sin\theta\sin\varphi)_\theta, (a\cos\theta)_\theta) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$

は θ 曲線の接ベクトルであり南向きのベクトルで，大きさは a である．

$\boldsymbol{r}_\varphi = ((a\sin\theta\cos\varphi)_\varphi, (a\sin\theta\sin\varphi)_\varphi, (a\cos\theta)_\varphi) = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$

は φ 曲線の接ベクトルであり東向きのベクトルで，大きさは $a\sin\theta$ である．

(4) $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示せよ．また，$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ と $\boldsymbol{r}$ は平行になることを確かめよ．

$\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$

$$= \left(\begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a\sin\theta & a\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \right)$$

$$= (a^2\sin^2\theta\cos\varphi, a^2\sin^2\theta\sin\varphi, a^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + a^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi)$$

$$= (a^2\sin^2\theta\cos\varphi, a^2\sin^2\theta\sin\varphi, a^2\cos\theta\sin\theta)$$

$$= a\sin\theta(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta) = a\sin\theta\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$$

だから $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ と $\boldsymbol{r}$ は平行になる.

(5) 面積要素 $dS = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi|\, d\theta d\varphi$ を求めよ.

(4) より $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi = a\sin\theta\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ だから $|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi| = a\sin\theta|\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)| = a^2\sin\theta$.

従って $dS = a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$.

(6) S の面積を求めよ.

$$\iint_S dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} [-a^2\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2a^2 d\varphi = 4\pi a^2.$$

(7) S の $z \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ である部分 S' の面積を求めよ.

点 P がこの部分を動くとき θ, φ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ の範囲を動くので,

$$\iint_{S'} dS$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[-a^2\cos\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\varphi = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)a^2.$$

(8) S を外向きに向き付ける. $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく. ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ を S 上で面積分せよ.

$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{n}$ だから

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{r^2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{a^2}\iint_S dS = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi$$