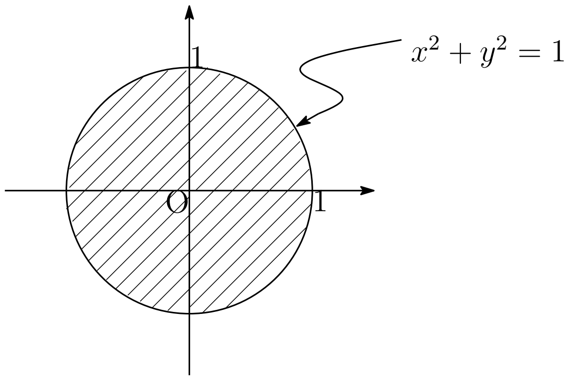
電気のための微分積分Ｄ 演習問題 No.11 解答

[お願い]　この解答がわかりにくい、もっと丁寧に説明してほしいという人は、メイルを出す、授業中に発言するなどの方法で小山までお知らせください。その際、わからない箇所を具体的に指摘してくれると大変ありがたいです。授業中に説明をいたします。

1 次の積分領域を図示し二重積分を計算せよ.

(1) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$ とするとき
$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$



極座標変換すると
$\sqrt{x^2+y^2} = r,\quad dxdy = rdrd\theta,$
$\Omega = \{(r, \theta)\ : -\pi \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq 1\ \}$
だから

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_\Omega r\,rdrd\theta$$

累次積分すると

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^1 \left(r^2\right) dr\right] d\theta = 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r\to 0}^{r\to 1} = 2\pi \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\,\pi}{3}$$

(2) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ (R は正の定数) とするとき
$\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$

極座標変換すると
$\sqrt{R^2-x^2-y^2} = \sqrt{R^2-r^2},\quad dxdy = rdrd\theta,$
$\Omega = \{(r, \theta)\ : -\pi \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq R\ \}$

だから

$= \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\theta$

累次積分すると

$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right) r\ dr \right] d\theta$

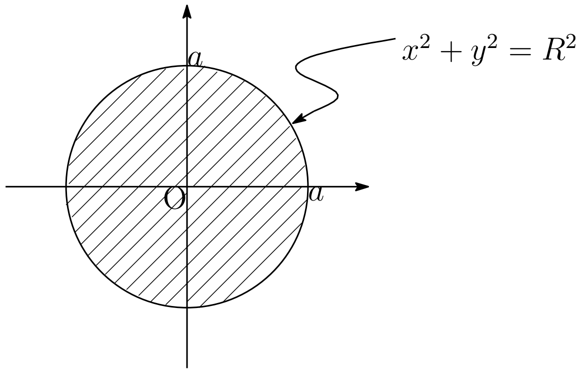
$R^2 - r^2 = t$ とおくと

$\dfrac{dt}{dr} = -2r$ だから $rdr = \dfrac{-dt}{2}$

$r = 0$ のとき $t = R^2,\ r = R$ のとき $t = 0$

だから

$= 2\pi \int_{R^2}^{0} \sqrt{t} \left(\dfrac{-dt}{2} \right) = 2\pi \left[\dfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \left(\dfrac{-1}{2} \right) \right]_{t \to R^2}^{t \to 0} = \dfrac{2\pi R^3}{3}$



2 次の二重積分を計算せよ.

$\iint_D \sin(x-y)\, dxdy$

$D = \{ (x, y) \mid -\pi \leqq x \leqq \pi, -\pi \leqq y \leqq \pi \ \}$

$\begin{cases} t = x - y \\ s = y \end{cases}$

により変数変換する. これは

$\begin{cases} x = t + s \\ y = s \end{cases}$

と同値である。

$\begin{vmatrix} x_t & x_s \\ y_t & y_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Omega = \{ (t, s) | -\pi \leqq t + s \leqq \pi,\ -\pi \leqq s \leqq \pi \} = \{ (t, s) | -\pi \leqq s \leqq \pi,\ -s - \pi \leqq t \leqq -s + \pi,\ \}$

だから置換積分・累次積分すると

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x-y)\, dxdy &= \iint_\Omega \sin(t)\, dtds = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-s-\pi}^{-s+\pi} \sin(t)\, dt \right) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big[-\cos(t) \Big]_{t=-s-\pi}^{t=-s+\pi} ds = \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(-s+\pi) + \cos(-s-\pi))\, ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(-s+\pi) + \cos(-s-\pi))\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} (+\cos(-s) - \cos(-s))\, ds = 0 \end{aligned}$$