電気のための微分積分D 演習問題 No.10 解答

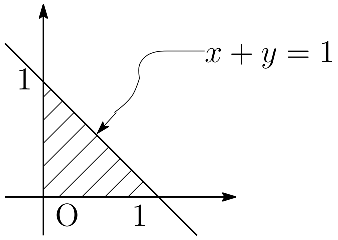
[お願い] この解答がわかりにくい、もっと丁寧に説明してほしいという人は、メイルを出す、授業中に発言するなどの方法で小山までお知らせください。その際、わからない箇所を具体的に指摘してくれると大変ありがたいです。授業中に説明をいたします。

1. (1) 平面の領域

$D = \{(x, y)|\ x \geqq 0, y \geqq 0, x + y \leqq 1\}$

を図示せよ.

$x \geqq 0$, だから y 軸の右側. $y \geqq 0$, だから x 軸の上側. $x + y \leqq 1$ の表す領域は直線 $x + y = 1$ の片側であるが, $x = 0$, $y = 0$ を代入すると $x + y \leqq 1$ が成り立つので $(0, 0)$ を含む側, 即ち下側である。 以上から図のような部分である。



(2) このとき 二重積分

$$I = \iint_D (2x - y)\, dxdy$$

を計算しよう.

D を縦線集合で表すと

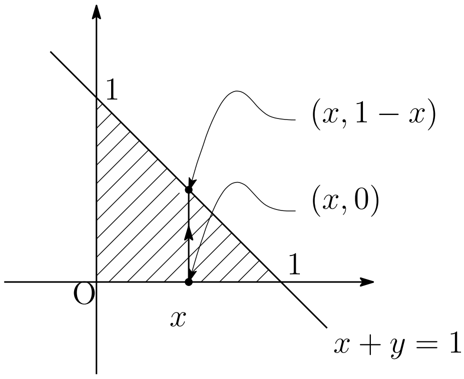
$D = \{(x, y); 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x\}$

であるので累次積分に直すと

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2x - y)\, dy \right) dx$$

となるがさらにこの先を計算すると

$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y \to 0}^{y \to 1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(2x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{5x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2} \right) dx$$
$$= \left[-\frac{5x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_{x \to 0}^{x \to 1}$$
$$= -\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



となる.

(3) また D を横線集合で表すと

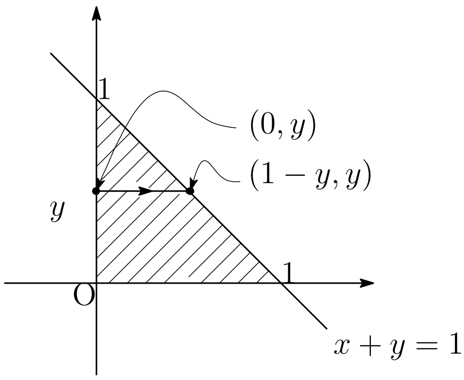
$D = \{(x, y); 0 \leqq y \leqq 1,\ \ 0 \leqq x \leqq 1 - y\}$

であるので 累次積分に直すと

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (2x - y)\, dx \right) dy$$

となるがさらにこの先を計算すると

$$= \int_0^1 \left[x^2 - xy \right]_{x \to 0}^{x \to 1-y} dy$$
$$= \int_0^1 \left((1-y)^2 - (1-y)y \right) dy$$
$$= \int_0^1 \left(2y^2 - 3y + 1 \right) dy$$
$$= \left[\frac{2y^3}{3} - \frac{3y^2}{2} + y \right]_{y \to 0}^{y \to 1}$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{6}$$



となり同じ答になる.

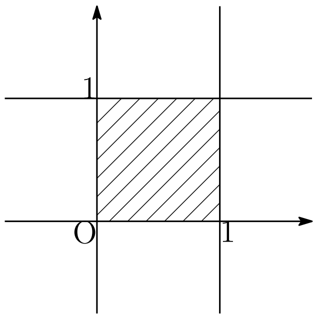
3.2 次の積分領域を図示し二重積分を計算せよ.

(1) $D = \{(x, y) |\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

$$\iint_D (2x - y)\, dxdy$$

$D = \{(x, y) |\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

$$\iint_D (2x - y)\, dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (2x - y)\, dx\right] dy$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 - xy\right]_{x\to 0}^{x\to 1} dy$$
$$= \int_0^1 (1 - y)\, dy$$
$$= \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y\to 0}^{y\to 1}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



また

$$\iint_D (2x - y)\, dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (2x - y)\, dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y\to 0}^{y\to 1} dx$$
$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \left[x^2 - \frac{x}{2}\right]_{y\to 0}^{y\to 1}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

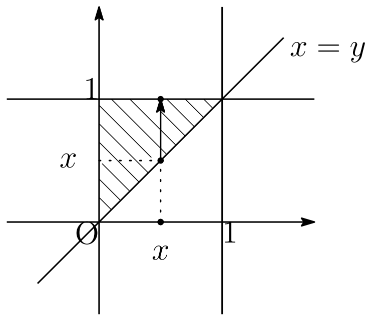
でもよい.

(2) $D = \{(x, y) |\ 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

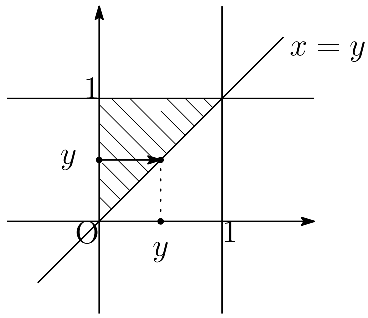
$$\iint_D (2x - y)\, dxdy$$

$D = \{(x, y) |\ 0 \leqq x \leqq 1, x \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

$$\iint_D (2x-y)\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\int_x^1 (2x-y)\,dy\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y\to x}^{y\to 1} dx$$
$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{1}{2} - \left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(-\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\right) dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{2}\right]_{x\to 0}^{x\to 1}$$
$$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$



また



$$\iint_D (2x-y)\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^y (2x-y)\,dx\right] dy$$
$$= \int_0^1 \left[x^2 - xy\right]_{x\to 0}^{x\to y} dy$$
$$= \int_0^1 \left(y^2 - y^2\right) dy$$
$$= \int_0^1 (0)\,dy = 0$$

でもよい.