電気のための微分積分D 第6回問題 解答

問題 1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ とするとき, $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ を計算せよ。

$$f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (\text{極座標を使うと}=\cos\theta),$$
$$f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (\text{極座標を使うと}=\sin\theta)$$

は第5回を見てください。

$$f_{xx}(x,y)=(f_x(x,y))_x=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x$$

商の微分法により

$$=\frac{(x)_x\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x}{x^2+y^2}$$

$(x)_x=1$ と前問の結果より

$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

分母分子に $\sqrt{x^2+y^2}$ をかけて

$$=\frac{(x^2+y^2)-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(r\sin\theta)^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin^2\theta}{r}$$

または

$f_{xx}=(\cos\theta)_x$

から出発して合成関数の微分法により

$$=(\cos\theta)_\theta\,\theta_x$$

ここで $(\cos\theta)_\theta=-\sin\theta$ と第5回の結果 $\theta_x=\dfrac{-\sin\theta}{r}$ により

$$=-\sin\theta\frac{-\sin\theta}{r}=\frac{\sin^2\theta}{r}.$$

でもよい.

$$f_{xy}(x,y)=(f_x(x,y))_y=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(x)_y \sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y}{x^2+y^2}$$

$(x)_y = 0$ と前問の結果より

$$= \frac{-x \cdot \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r^2 \sin\theta\cos\theta}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}$$

または

$f_{xy} = (\cos\theta)_y$

から出発して合成関数の微分法により

$$= (\cos\theta)_\theta\, \theta_y$$

ここで $(\cos\theta)_\theta = -\sin\theta$ と第5回の結果 $\theta_y = \dfrac{\cos\theta}{r}$ により

$$= -\sin\theta \frac{\cos\theta}{r} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}.$$

でもよい.

$$f_{yy}(x,y) = (f_y(x,y))_y = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_y \sqrt{x^2+y^2} - y \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y}{x^2+y^2}$$

$(y)_y = 1$ と前問の結果より

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y \cdot \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

分母分子に $\sqrt{x^2+y^2}$ をかけて

$$= \frac{(x^2+y^2)-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(r\cos\theta)^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

または

$f_{yy} = (\sin\theta)_y$

から出発して合成関数の微分法により

$$= (\sin\theta)_\theta\, \theta_y$$

ここで $(\sin\theta)_\theta = \cos\theta$ と第5回の結果 $\theta_y = \dfrac{\cos\theta}{r}$ により

$$= \cos\theta\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos^2\theta}{r}.$$

でもよい.

$$f_{xx}(x,y) = \tfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{yy}(x,y) = \tfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

を比べると, x, y を入れ替えたものになっている。どうしてそうなるか説明して見よ。

問題 2. 次の関数の極値を求め, 極値の近くでグラフを書いて見よ.

(1) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 2y$

(step1) 必要条件をみたす (a,b) をさがす.

$f_x(x,y) = 2x + 2y + 4,\ f_y(x,y) = 2x + 4y + 2$

だから必要条件は

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 2a + 2b + 4 = 0 \\ f_y(a,b) = 2a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

である. これをみたす (a,b) は $(-3,1)$ であり, この点以外では極値をとらない.

(step2) $f(x,y)$ が $(-3,1)$ で極値をとるための十分条件を満たしているか確かめる.

$f_{xx}(x,y) = 2,\ \ f_{xy}(x,y) = 2,\ \ f_{yy}(x,y) = 4$

だから $(-3,1)$ では

$f_{xx}(-3,1) = 2 > 0,$

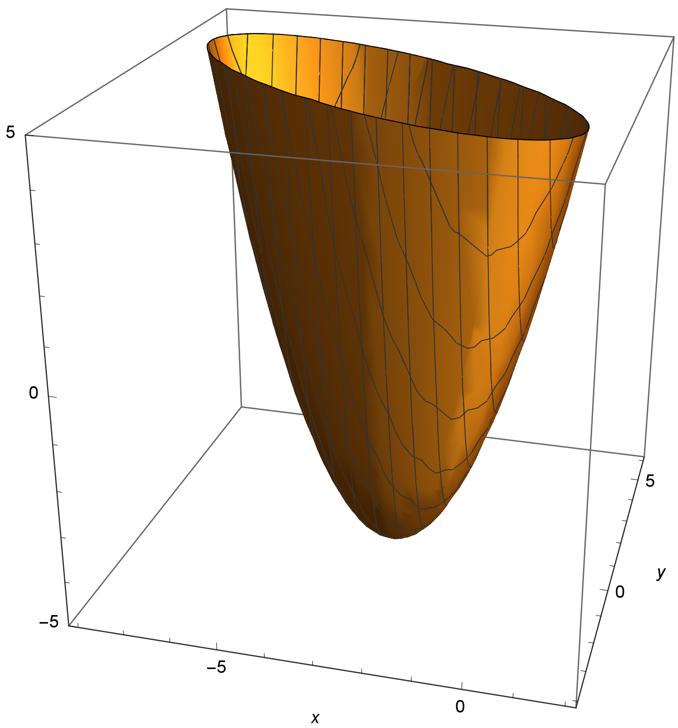
$$\begin{vmatrix} f_{xx}(-3,1) & f_{xy}(-3,1) \\ f_{xy}(-3,1) & f_{yy}(-3,1) \end{vmatrix} = f_{xx}(-3,1)\,f_{yy}(-3,1) - (f_{xy}(-3,1))^2 = 4 > 0$$

だから定理 8.10 により極小となる.

極小値は $f(-3,1) = -5$.

図とコマンドは以下の通り:

```
g = Plot3D[x^2 + 2 x*y + 2*y^2 + 4 x + 2 y, {x, -8, 2}, {y, -4, 6},
  PlotRange -> {-5, 5}, ClippingStyle -> None, BoxRatios -> {1, 1, 1},
   AxesLabel -> Automatic]
```



(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

(step1) 必要条件をみたす (a,b) をさがす.

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y,\ f_y(x,y) = 3y^2 - 6x$$

だから必要条件は

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 3a^2 - 6b = 0 \cdots ① \\ f_y(a,b) = 3b^2 - 6a = 0 \cdots ② \end{cases}$$

である.

① より $b = \dfrac{1}{2}a^2$

② へ代入して

$$\frac{3}{4}a^4 - 6a = 0$$
$$a(a^3 - 8) = 0$$
$$a(a-2)(a^2+2a+4) = 0$$

$a^2 + 2a + 4$ は常に正だから

$a = 0$ または $a = 2$,

$a = 0$ のとき $b = 0$

$a = 2$ のとき $b = 2$

だから必要条件を満たす (a,b) は $(0,0)$ と $(2,2)$ である.

(step2) 次に [B] を満たすか判定する.

$f_{xx}(x,y)=6x,\ \ f_{xy}(x,y)=-6,\ \ f_{yy}(x,y)=6y$

だから $(x,y)=(0,0)$ のとき

$f_{xx}\left(0,0\right)f_{yy}\left(0,0\right)-\left(f_{xy}\left(0,0\right)\right)^2=-(-6)^2<0$

だから $(0,0)$ では, 極値をとらない.

$(x,y)=(2,2)$ のとき

$f_{xx}\left(2,2\right)f_{yy}\left(2,2\right)-\left(f_{xy}\left(2,2\right)\right)^2=12\times12-(-6)^2>0$

$f_{xx}\left(2,2\right)=12>0$

だから $(2,2)$ で極小となる. 極小値は $f(2,2)=-8$.

図とコマンドは以下の通り:

```
Plot3D[x^3 + y^3 - 6 x*y, {x, -2, 4}, {y, -2, 4},
 PlotRange -> {-8, 4}, ClippingStyle -> None,
 AxesLabel -> Automatic]
```