電気のための微分積分D 第4回問題 解答

問題 1. (1) $f(x,y) = e^{3x-2y}$ のとき,

$3x-2y=t$ とおくと $z = e^{3x-2y}$ は $z=e^t$ と $t = 3x-2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_x \\ &= e^t \times 3 = 3e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_y \\ &= e^t \times (-2) = -2e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

(2) $f(x,y) = \sin(xy)$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\sin t)_t \times t_x \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_x \\ &= \cos t \times y = y\cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\sin t)_t \times t_y \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_y \\ &= \cos t \times x = x\cos(xy) \end{aligned}$$

(3) $f(x,y) = e^{3x-2y}\sin(xy)$

ふたつの関数 e^{3x-2y} と $\sin(xy)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$f_x(x,y) = (e^{3x-2y})_x \sin(xy) + e^{3x-2y}\left(\sin(xy)\right)_x$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= 3e^{3x-2y}\sin(xy) + ye^{3x-2y}\cos(xy) \\ &= e^{3x-2y}(3\sin(xy) + y\cos(xy)) \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x,y) = (e^{3x-2y})_y \sin(xy) + e^{3x-2y}\left(\sin(xy)\right)_y$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= -2e^{3x-2y}\sin(xy) + xe^{3x-2y}\cos(xy) \\ &= e^{3x-2y}(-2\sin(xy) + x\cos(xy)) \end{aligned}$$

(4) $f(x,y) = x\cos y - \sin x \cos y + \sin(xy)$.

$xy = t$ とおいて

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x\cos y)_x - (\sin x \cos y)_x + (\sin(xy))_x \\ &= (x)_x \cos y - (\sin x)_x \cos y + (\sin t)_t \times t_x \\ &= \cos y - \cos x \cos y + \cos t \times y \\ &= \cos y - \cos x \cos y + y\cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (x\cos y)_y - (\sin x \cos y)_y + (\sin(xy))_y \\ &= x(\cos y)_y - \sin x(\cos y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\ &= -x\sin y + \sin x \sin y + \cos t \times x \\ &= -x\sin y + \sin x \sin y + x\cos(xy) \end{aligned}$$

問題 2. (1) 略 (第 1 回のスライドを参考にせよ)

(2) $z = f(x,y)$ のグラフは空間の点 $(x, y, f(x,y))$ を集めた集合である. だからグラフ上の $x = a$, $y = b$ であるような点の座標は

$$(a, b, f(a,b)) = (a, b, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

である。

(3) $x^2 + y^2 < R^2$ のとき $R^2 - x^2 - y^2 = t0$ とおくと $t > 0$. だから $\sqrt{t}$ は微分可能。ここで合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (R^2 - x^2 - y^2)_x \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ f_y(x,y) &= \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (R^2 - x^2 - y^2)_y \\ &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

(4) したがって

$$f_x(a,b) = \frac{-a}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}, \quad f_y(a,b) = \frac{-b}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}$$

である. 接平面上の点を (x,y,z) とおき, 上の結果を $z=f(x,y)$ の $\mathrm{A}(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

に代入すると

$$z - \sqrt{R^2-a^2-b^2} = \frac{-a(x-a)}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}} + \frac{-b(y-b)}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}$$

となる. これが球面の接平面の方程式である。

さらに $\sqrt{R^2-a^2-b^2} = c > 0$ とおき整理すると $a^2+b^2+c^2 = R^2$ であるから,

$$ax + by + cz = R^2$$

とすると大変簡単になる. これが何を意味するか考えよ。

また, 法線ベクトルは

$$(f_x(a,b), f_y(a,b), -1) = \left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}, -1\right)$$

であるが, これは中心と接点を結ぶベクトル (a,b,c) に平行である。これが何を意味するかも考えよ。