電気のための微分積分 D　第 3 回問題解答

問題 1. 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を計算せよ。

(1)　$f(x,y) = 3xy^2$

x に関する偏微分は x のみの関数として微分することであるから, 3, y^2 は定数としてあつかうので $(\ )_x$ の外に出せる。

$$f_x(x,y) = (3xy^2)_x = 3y^2(x)_x = 3y^2\,1 = 3y^2$$

y に関する偏微分は y のみの関数として微分することであるから, 3, x は定数としてあつかうので $(\ )_y$ の外に出せる。

$$f_y(x,y) = (3xy^2)_y = 3x(y^2)_y = 3x\,2y = 6xy$$

(2)　$f(x,y) = \sin(3xy^2)$

$3xy^2 = t$ とおき合成関数の微分法を使う。

$$f_x(x,y) = (\sin(3xy^2))_x = (\sin(t))_x$$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_x = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_x = \cos(t) \times 3y^2 = 3y^2\cos(3xy^2)$$

$$f_y(x,y) = (\sin(3xy^2))_y = (\sin(t))_y$$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_y = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_y = \cos(t) \times 6xy = 6xy\cos(3xy^2)$$

(3)　$f(x,y) = xy\sin(3x-2y)$

積の微分法と合成関数の微分法が必要である。

まず積の微分法により

$$f_x(x,y) = (xy)_x\sin(3x-2y) + xy(\sin(3x-2y))_x$$

つぎに, (1) と同様にして $(xy)_x = y$. また, $3x-2y = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}(\sin(3x-2y))_x &= (\sin(t))_x = (\sin(t))_t \times t_x \\ &= (\sin(t))_t \times (3x-2y)_x = \cos(t) \times 3 = 3\cos(3x-2y)\end{aligned}$$

あわせて

$$f_x(x,y) = y\sin(3x-2y) + xy(3\cos(3x-2y)) = y\sin(3x-2y) + 3xy\cos(3x-2y)$$

同様に, 積の微分法により

$$f_y(x,y) = (xy)_y \sin(3x-2y) + xy(\sin(3x-2y))_y$$

つぎに, (1) と同様にして $(xy)_y = x$. また, $3x-2y=t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}(\sin(3x-2y))_y &= (\sin(t))_y = (\sin(t))_t \times t_y \\ &= (\sin(t))_t \times (3x-2y)_y = \cos(t)\times(-2) = -2\cos(3x-2y)\end{aligned}$$

あわせて

$$f_y(x,y) = x\sin(3x-2y) + xy(-2\cos(3x-2y)) = x\sin(3x-2y) - 2xy\cos(3x-2y)$$

(4) $f(x,y) = x\sin y - \cos(xy)$

$xy=t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$(\cos(xy))_x = (\cos(t))_x = (\cos(t))_t \times t_x = (\cos(t))_t \times (xy)_x = -\sin(t)\times y = -y\sin(xy)$$
$$(\cos(xy))_y = (\cos(t))_y = (\cos(t))_t \times t_y = (\cos(t))_t \times (xy)_y = -\sin(t)\times(x) = -x\sin(xy)$$

だから

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= (x\sin y)_x - (\cos(xy))_x = (x)_x\sin y - (\cos(xy))_x = \sin y + y\sin(xy) \\ f_y(x,y) &= (x\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x(\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x\cos y + x\sin(xy)\end{aligned}$$