電気のための微分積分 D
第 1 回問題解答

問題 1. (1) ベクトル $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$ に垂直で点 A$(1,1,0)$ を通る平面 K の方程式を書け。

$z-c=\alpha(x-a)+\beta(y-b)$

に

$\alpha=1,\ \beta=2,\ a=1,\ b=1, c=0$ を代入して

$z-0=1(x-1)+2(y-1)$

整理して

$z=x+2y-3$

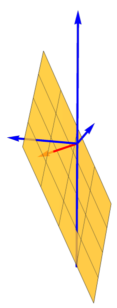
(2) 平面 K と z 軸の交点を求めよ。

交点の座標を P(x,y,z) とすると

$$\begin{cases} z=x+2y-3, & \text{P が } K \text{ 上にあるから} \\ x=0, y=0, & \text{P が } z \text{ 軸上にあるから} \end{cases}$$

を解いて $z=-3$, したがって P の座標は $(0,0,-3)$.

(3) 平面 K と 原点との距離を求めよ。



K に原点から垂線を引いたときの K との交点を H(x,y,z) とおく。これが原点から最短距離にある点である。なぜなら、K 上の任意の点を P とするとき, OH$\perp$HP となるから三平方の定理により

$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HP}^2 \geqq \mathrm{OH}^2$

となるからである。

$\mathrm{OH} /\!/ \boldsymbol{n}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x, y, z) = t\boldsymbol{n} = (t, 2t, -t)$

となる実数 t がある。これを $z = x + 2y - 3$ に代入して $t = \frac{1}{2}$. したがって

OH$= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = |(t, 2t, -t)| = \sqrt{6}t = \frac{\sqrt{6}}{2}$

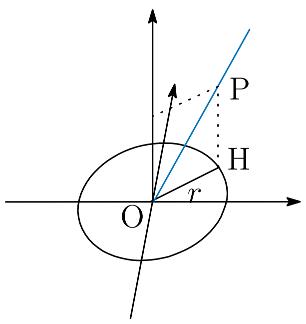
問題 2. (1) 2変数関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフが逆さにした円錐の表面となることを説明せよ。

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。これは原点 O と xy 平面上の点 A(x, y) との距離である。

$f(x, y) = r$ だから関数 $f(x, y)$ の値は点 (x, y) と原点との距離 r だけで決まることになる. だからこの関数のグラフは z 軸を中心にした回転体となる.

いま, $f(x, y) = z$ とおくと $z = r$ であるから, 原点 O, 点 H$(x, y, 0)$, 点 P(x, y, z) は直角 2 等辺三角形を作り, 角 $\angle$HOP は常に $\dfrac{\pi}{4}$ である。だから P は原点をとおり傾き 1 の直線上にある。

$z = f(x, y)$ のグラフはこの直線を z 軸を中心に回転させた回転体となる. したがって円錐面である.



(2) この関数のグラフの概形を Mathematica で書いてみよ。