電気のための微分積分 D 第 7 回 解答

問題 1. 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y - 3y^2$ のとき。青字を定数と見なして () の外に出すと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x^3 - 2x^2y - 3y^2)_x = (x^3)_x - (2x^2y)_x - (3y^2)_x \\ &= (x^3)_x - 2y(x^2)_x - 3y^2(1)_x = 3x^2 - 2y(2x) - 0 = 3x^2 - 4xy \\ f_y(x,y) &= (x^3 - 2x^2y - 3y^2)_y = (x^3)_y - (2x^2y)_y - (3y^2)_y \\ &= x^3(1)_y - 2x^2(y)_y - 3(y^2)_y = 0 - 2x^2 - 3(2y) = -2x^2 - 6y \end{aligned}$$

(2) $f(x,y) = \cos(x - 3y + 2)$

$x - 3y + 2 = t$ とおき合成関数の微分法を使う。$\cos(1), -\sin(1)$ のように ( ) の中を微分するのは誤り

$f_x(x,y) = (\cos(x - 3y + 2))_x = (\cos(t))_x$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\cos(t))_t \times t_x = (\cos(t))_t \times (x - 3y + 2)_x = -\sin(t) \times 1 = -\sin(x - 3y + 2)$$

$f_y(x,y) = (\cos(x - 3y + 2))_y = (\cos(t))_y$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\cos(t))_t \times t_y = (\cos(t))_t \times (x - 3y + 2)_y = -\sin(t) \times (-3) = 3\sin(x - 3y + 2)$$

(3) $f(x,y) = x\cos y - y\sin y + \sin(xy)$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

$$\begin{aligned} (\sin(xy))_x &= (\sin(t))_x = (\sin(t))_t \times t_x \\ &= (\sin(t))_t \times (xy)_x = \cos(t) \times y = y\cos(xy) \\ (\sin(xy))_y &= (\sin(t))_y = (\sin(t))_t \times t_y \\ &= (\sin(t))_t \times (xy)_y = \cos(t) \times x = x\cos(xy) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x\cos y)_x - (y\sin y)_x + (\sin(xy))_x \\ &= (x)_x\cos y - y\sin y(1)_x + (\sin t)_t \times t_x \\ &= \cos y + y\cos(xy) \\ f_y(x,y) &= (x\cos y)_y - (y\sin y)_y + (\sin(xy))_y \end{aligned}$$

積の微分法を使って

$$
\begin{aligned}
&= x(\cos y)_y - (y)_y \sin y - y(\sin y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\
&= -x \sin y - \sin y - y \cos y + x \cos(xy)
\end{aligned}
$$

(4) $f(x,y) = e^{3xy} \cos(3y)$

$3xy = t$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

$$
\begin{aligned}
(e^{3xy})_x &= (e^{t})_x = (e^{t})_t \times t_x \\
&= (e^{t})_t \times (3xy)_x = e^{t} \times 3y = 3ye^{3xy} \\
(e^{3xy})_y &= 3xe^{3xy}
\end{aligned}
$$

だから積の微分法を使って

$$
\begin{aligned}
(e^{3xy}\cos(3y))_x &= (e^{3xy})_x \cos(3y) + e^{3xy}(\cos(3y))_x = 3ye^{3xy}\cos(3y) + e^{3xy} \times 0 \\
&= 3ye^{3xy}\cos(3y) \\
(e^{3xy}\cos(3y))_y &= (e^{3xy})_y \cos(3y) + e^{3xy}(\cos(3y))_y = 3xe^{3xy}\cos(3y) + e^{3xy}(-3\sin(3y)) \\
&= 3xe^{3xy}\cos(3y) - 3e^{3xy}\sin(3y)
\end{aligned}
$$

2. 関数 $f(x,y) = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$ について次のものを求めよ.

(1) $f(1,1) = \sqrt{4-2-1} = 1$

(2) $f_x(x,y)$

$t = 4 - 2x^2 - y^2$ とおくと, $f(x,y) = \sqrt{t}$ だから合成関数の微分法により

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= (\sqrt{t})_x = (\sqrt{t})_t \times t_x = (\sqrt{t})_t (4 - 2x^2 - y^2)_x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (-4x) = \frac{-2x}{\sqrt{4 - 2x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$

(3) $f_y(x,y)$

同様に

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= (\sqrt{t})_y = (\sqrt{t})_t \times t_y = (\sqrt{t})_t (4 - 2x^2 - y^2)_y \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{4 - 2x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$

(4) $f_x(1,1)$

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$$

だから

$$f_x(1,1) = \frac{-2}{\sqrt{4-2-1}} = -2$$

(5) $f_y(1,1)$

$$f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$$

だから

$$f_x(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{4-2-1}} = -1$$

(6) この関数の $x=1$, $y=1$ に対応する点における接平面の方程式.

$z=f(x,y)$ のグラフの，点 $\mathrm{A}'(a,b,f(a,b))$ における**接平面**は

$$z-f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \cdots (\star)$$

(第 4 回のスライドを見よ)

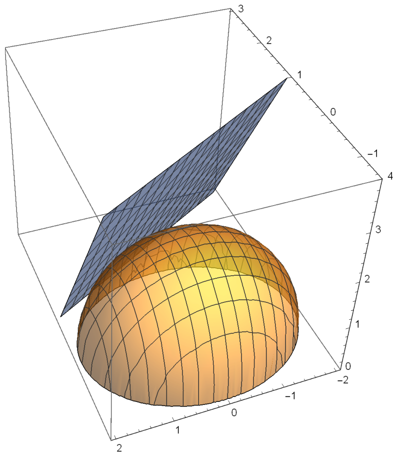
いま, $(a,b)=(1,1)$, $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=-2$, $f_y(1,1)=-1$,

だから

$$z-1 = (-2)(x-1) + (-1)(y-1)$$

整理して

$$z = -2x - y + 4$$



```
G = Plot3D[{Sqrt[4 - 2 x^2 - y^2], -2 x - y + 4},
    {x, -2, 3}, {y, -2, 2},
     PlotRange -> {0, 4}, BoxRatios -> {5, 4, 4},
     AspectRatio -> Automatic, ClippingStyle -> None,
     PlotStyle -> Opacity[0.6]]
```

3. (1) から (8) は演習問題第 5 回を見よ。

(9) $(\log r)_x$ を x, y または r, θ で表せ.

合成関数の微分法と (5) により

$$(\log r)_x = (\log r)_r \, r_x = \frac{1}{r}\cos\theta = \frac{\cos\theta}{r} \quad \left(= \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

x, y で表してもよいが, r, θ で表しておく方が後の計算が楽である (と思う)。

(10) 前問の結果より

$$(\log r)_{xx} = \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)_x$$

商の微分法により

$$= \frac{(\cos\theta)_x \, r - \cos\theta \, r_x}{r^2}$$

ここで合成関数の微分法と 演習 No.5 の 4(3) より

$$(\cos\theta)_x = (\cos\theta)_\theta \, \theta_x = (-\sin\theta)\frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}$$

だから

$$= \frac{\frac{\sin^2\theta}{r}r - \cos\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{r^2}$$

同様にして

$$(\log r)_y = (\log r)_r \, r_y = \frac{1}{r}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{r}$$

$$(\log r)_{yy} = \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(\sin\theta)_y\, r - \sin\theta\, r_y}{r^2}$$

ここで合成関数の微分法と 演習 No.5 の 4(4) より

$$(\sin\theta)_y = (\sin\theta)_\theta\ \theta_y = (\cos\theta)\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

だから

$$= \frac{\frac{\cos^2\theta}{r} r - \sin\theta\sin\theta}{r^2} = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}$$

以上により

$$(\log r)_{xx} + (\log r)_{yy} = 0$$

となる。このことを $\log r$ は調和関数であるという。調和関数は大事な関数である。

4. $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2$ について次のものを求めよ.

(1) $f_x(x, y) = 3x^2 + 6y$

(2) $f_y(x, y) = 6x + 6y$

(3) $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ をみたす点 (a, b).

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 3a^2 + 6b = 0 \\ f_y(a,b) = 6a + 6b = 0 \end{cases} \quad \cdots (\star)$$

をといて $(a, b) = (0, 0)$ または $(a, b) = (2, -2)$. $(\star)$ は (a, b) で極値をとるための必要条件である。

(4) $f_{xx}(x, y) = 6x$

(5) $f_{xy}(x, y) = 6$

(6) $f_{yy}(x,y)=6$

(7) (1) で求めた (a,b) (2 つある！) に対して

$$D=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6a & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 36(a-1) \quad \text{だから}$$

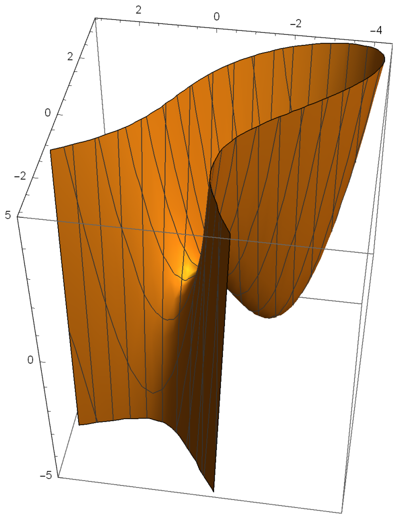
$(a,b)=(0,0)$ のとき $D=-36<0$

$(a,b)=(2,-2)$ のとき $D=36>0$

(8) (1) より $(a,b)=(0,0)$ または $(a,b)=(2,-2)$ 以外では極値をとらない。

$(a,b)=(0,0)$ のとき $D<0$ だから極値をとらない。（第 6 回のスライドを見よ）

$(a,b)=(2,-2)$ のとき $D>0$, $f_{xx}(2,-2)=12>0$ だから極小となる。極小値は $f(2,-2)=-4$.




```
Plot3D[x^3 + 6 x y + 3 y^2, {x, -3, 5}, {y, -5, 3},
 PlotRange -> {-5, 5}, ClippingStyle -> None,
 BoxRatios -> {8, 8, 10}]
```