本日やること

1. 微分方程式
   - 微分方程式とはどういうものか

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

2 年次科目　前期：電気のための微分積分 D (14 回),

内容は 2 変数関数の微積分・ベクトル解析

後期：微分方程式

運動方程式 (力 $=$ 質量 $\times$ 加速度) は微分方程式である。だから力学・工学の基本。

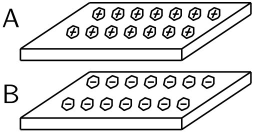
電磁気学は微分方程式を使って表現されている。

電気回路の解析をキチンと考えるために必要。

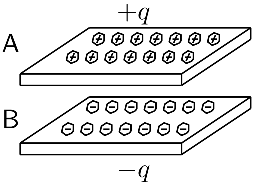
微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 1. コンデンサーの放電]



平行に置かれた 2 枚の金属板に電荷をためることができる。
この状態で B から A に単位電荷を運ぶためには (電気力に逆らって電荷を運ばなくてはならないので) 仕事が必要。
この仕事の量を AB 間の電位差といい, V で表す。(単位はボルト)



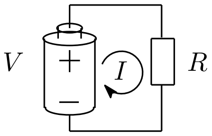
A の電荷を $+q$(クーロン), B の電荷を $-q$(クーロン) とする。
電位差 V は q に比例するから

$$q = CV \cdots (\star 1)$$

この比例定数 C を静電容量という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



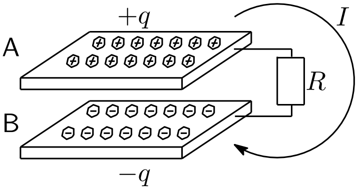
電位差 V のある 2 点を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる。その関係は

$$V = I\,R \cdots (\star 2)$$

電池は電荷が無制限にあるので，電位差を保ったままいつまでも電流が流れ続ける（と考える）。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



電荷を帯びた金属版を抵抗 R でつなぐと電流 I が流れる. I は A から B の向きに測ることにする。

[1]. 電位差 V に応じて I が (微小時間) 流れる

[2]. その結果電荷 q が微小に失われる

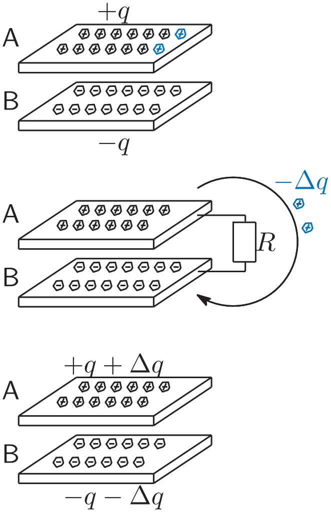
[3]. その結果電位差 V が微小に減少する

以上の [1], [2], [3] が繰り返し起こる。これが連続的に起こったらどうなるか調べたい。

q, V, I は時刻 t の関数となるので, $q(t)$, $V(t)$, $I(t)$ と書く。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか



この $I(t)$ を計算しよう。
t から $t+\Delta t$ までの A の電荷 $q(t)$ の変化量は

$$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t) \; (< 0)$$

またこのときの A から B への電荷の移動量は電流が流れる分だけ電荷が減少するのであるから $-\Delta q$ である。
1 秒間に 1 クーロンの電荷が流れるとき 1 アンペアの電流というのであるから

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \fallingdotseq -I(t)$$

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

$\Delta t \to 0$ とする極限をとって

$$\frac{dq}{dt} = -I(t) \cdots (\star 3)$$

$(\star 1)$, $(\star 2)$, $(\star 3)$ をまとめて

$$-I(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CR\frac{dI}{dt}$$

$$CR\frac{dI}{dt} + I(t) = 0 \cdots (\star 4)$$

この $(\star 4)$ のような未知の関数 $I(t)$ とその導関数の関係式を微分方程式という。

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

この微分方程式 $(\star 4)$ を満たす関数 (これを微分方程式の解という) は

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{CR}}$$

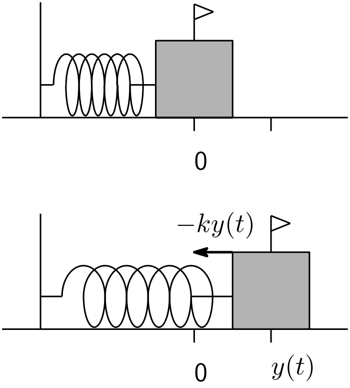
である。

[確かめ]

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

[例 2. 単振動]



図のように壁面に物体がバネでつながれている．床は摩擦がないものとする．
時刻 を t [s],
物体の質量を m [kg],
物体の時刻 t での位置を $y(t)$ [m] で表す．

ばねが伸縮していないときの物体の位置を原点とすると，物体にはバネの弾性力 $-ky(t)$ [N] が働く．($k > 0$ は弾性定数) $-$ がつくのは力の向きが変位 y の向きと反対だからである。運動方程式から $y(t)$ は微分方程式

$$my''(t) = -ky(t)$$

を満たすことがわかる．

微分方程式

微分方程式とはどういうものか

解は

$$y = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{または} \quad y = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

(C_1, C_2, A, φ は $y(0)$, $y'(0)$ から決まる定数)

である.

[確かめ]