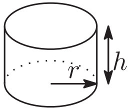
本日やること

1. 積分法の応用
   - 立体の体積

積分の応用

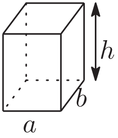
立体の体積

[円柱の体積]



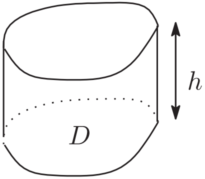
$$V = \pi r^2 h$$

[四角柱の体積]



$$V = abh$$

柱体の体積



$$V = Sh$$

平面図形 D を垂直に h だけ平行移動して得られる立体を底面 D 高さ h の (直) 柱体という。D の面積を S とするときこの柱体の体積 V は

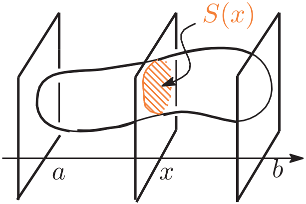
$$V = Sh$$

.

積分の応用

立体の体積

立体図形の体積



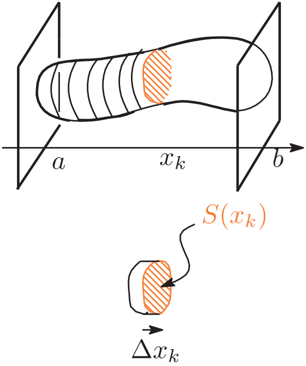
図のような立体図形を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とすると，体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

積分の応用

立体の体積

[確かめ]



立体を分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ によって, x 軸に垂直な平面で薄切りにする。

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

とすると (直柱体で近似して)

k 番目の断片の体積 $\fallingdotseq S(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$V \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

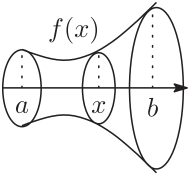
分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx$$

($S(x)\,dx$ は微小柱体の体積である)

積分の応用
立体の体積

回転体の体積



曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b \quad (a < b)$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$$

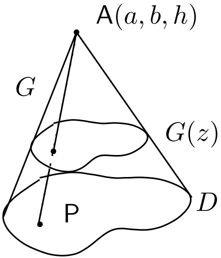
[確かめ]

立体を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $|f(x)|$ の円であるから, その面積は $S(x) = \pi f(x)^2$ だから。

積分の応用

立体の体積

錐体の体積



D を xy 平面の閉領域とし，座標 (a, b, h) $(h > 0)$ の点を A とする．このとき，D の各点 P と A を結ぶ線分 AP をすべて集めてできる立体図形 G を，D を底面，A を頂点とする錐体という．G の体積 V は D の面積を S とするとき

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

である．

積分の応用

立体の体積

[確かめ] G を，点 $(0, 0, z)$ を通り z 軸に垂直な平面で切った断面 $G(z)$ は D と相似で相似比は $h : h - z$，面積比は $h^2 : (h - z)^2$ である．したがって $G(z)$ の面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 S$$

であり，

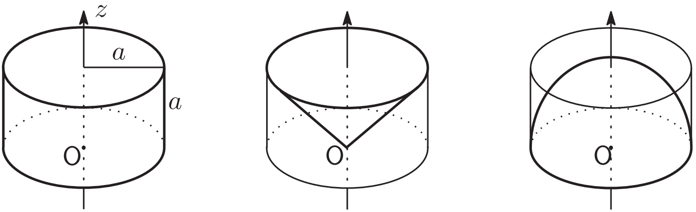
$$V = \int_0^h \left(\frac{h - z}{h}\right)^2 dz\, S = \frac{1}{3} Sh$$

である．

積分の応用

立体の体積

[例題]



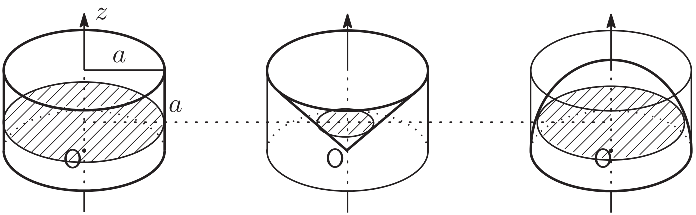
(a) (b) (c)

(a):底面の半径 a, 高さ a の円柱, (b): それに内接する円錐, (c): 半径 a の球の上半部分である.

(a) の体積 V_a, (b) の体積 V_b, (c) の体積 V_c を求め, $V_a = V_b + V_c$ であることを確かめよ.

積分の応用

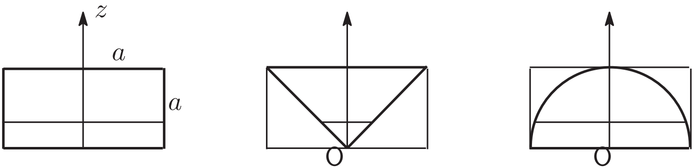
立体の体積



(a)　(b)　(c)

高さ z で切った切り口の面積をそれぞれ $S_a(z)$, $S_b(z)$, $S_c(z)$ とする

積分の応用
立体の体積



(a) (b) (c)

$$S_a(z) = \pi a^2, \quad S_b(z) = \pi z^2, \quad S_c(z) = \pi(a^2 - z^2)$$

だから

$$V_a = \int_0^a \pi a^2\,dz = \pi a^3, \quad V_b = \int_0^a \pi z^2\,dz = \frac{\pi}{3}a^3,$$
$$V_c = \int_0^a \pi(a^2 - z^2)\,dz = \frac{2\pi}{3}a^3$$

これから $V_a = V_b + V_c$ がわかる。

積分の応用
立体の体積

実は, 任意の z に対して $S_a(z) = S_b(z) + S_c(z)$ であることから

$$V_a = V_b + V_c$$

であることが (積分をしなくとも) 直ちに分かる.