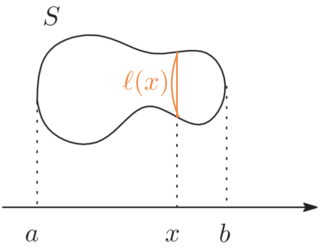
本日やること

1. 積分法の応用
   - 平面図形の面積

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



左図のような図形を，点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする．$\ell(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

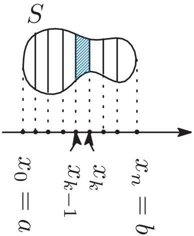
$$S = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

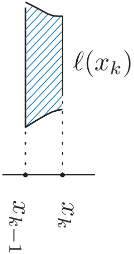
.

積分法の応用

平面図形の面積

[確かめ]





$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

k 番目の断片の面積 $\fallingdotseq \ell(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

$\ell(x)\, dx$ は微小長方形の面積であることに注意せよ。

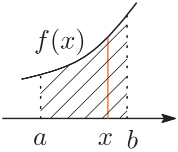
積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

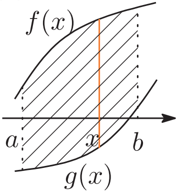
(i)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ であるとき,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であるとき,

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

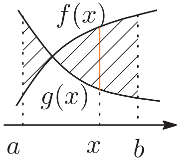
積分法の応用

平面図形の面積

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



区間 $[a, b]$ で $f(x)$, $g(x)$ の大小関係が一定でないときでも

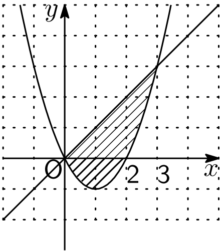
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

[確かめ]
(i) のとき,　$\ell(x) = f(x)$,
(ii) のとき,　$\ell(x) = f(x) - g(x)$,
(iii) のとき,　$\ell(x) = |f(x) - g(x)|$
だから。

積分の応用

平面図形の面積

[例題] 関数 $y = x^2 - 2x \cdots (\star)$ のグラフである放物線と, $y = x \cdots (\star 2)$ のグラフである直線で囲まれる図形の面積を求めよう。



$(\star)$ は $y = x^2 - 2x = x(x-2)$ だから $y = 0$ となるのは $x = 0$ または 2 のとき。 だから x 軸との交点は $(0,0)$ と $(2,0)$。 また $y = (x-1)^2 - 1$ だから頂点が $(1,-1)$ の放物線である. $y'' = 2 >$ だから下に凸。

$(\star 2)$ は原点をとおり傾き 1 の直線。

交点の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$ をといて $(0,0)$ と $(3,3)$.

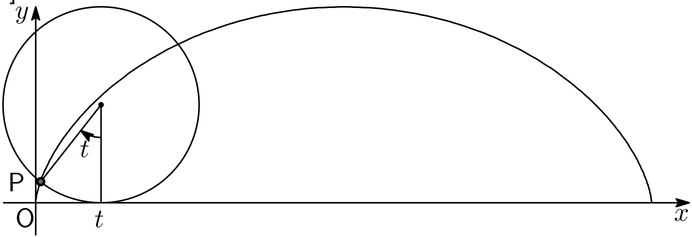
この図形は $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあり, この範囲では $(\star 2)$ が $(\star)$ の上方にあるから面積は

$$\int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\}\, dx = \int_0^3 \{-x^2 + 3x\}\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

積分の応用

平面図形の面積

[例]



$a > 0$: 定数　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ のとき

$$(\star)\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

によってパラメータ表示される曲線 C を cycloid (サイクロイド) 曲線 という. C と x 軸で囲まれた部分 D の面積を求める.

積分の応用

平面図形の面積

x, y が $(\star)$ を満たすとき, 点 P(x, y) が動いてできる奇跡が C である.

$$\ell(x) = y = a(1 - \cos t),$$

$x = a(t - \sin t)$ により変数変換すると $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ だから

$$dx = a(1 - \cos t)dt$$

だから置換積分により

$$D \text{ の面積} = \int_0^{2\pi a} \ell(x)\, dx = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$