

本日よりこと

- 1 積分法
 - 広義積分

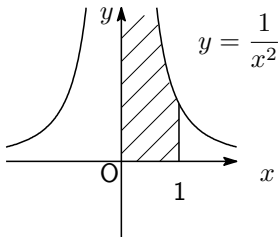
定積分法

広義積分

$f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ が存在

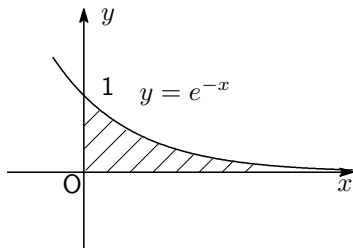
1. 端の点で不連続な (または連続になるように定義できない) 場合]

例



2. [積分区間が有界でない場合]

例



の積分も重要である.

このような場合の関数 $f(x)$ の定積分を定めよう.

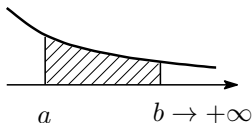
定積分法

広義積分

[1] 区間 $[a, \infty)$ 上の広義積分の定義

$f(x) : [a, \infty)$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$



が存在するとき**広義積分** $\int_a^\infty f(x) dx$ は収束する**といい**, その値を

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[2] 区間 $(-\infty, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x) : (-\infty, b]$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

が存在するとき **広義積分** $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

となる。これを

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[3] 区間 $[a, b)$ 上の広義積分の定義

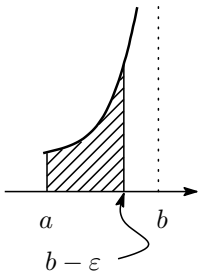
$f(x) : [a, b)$ で連続であるが $x = b$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき **広義積分** $\int_a^b f(x) dx$ は収束する
といい, その値を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

によって定める.



定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b - \varepsilon) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^{b-0} = F(b - 0) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[4] 区間 $(a, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x) : (a, b]$ で連続であるが $x = a$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

が存在するとき **広義積分** $\int_a^b f(x) dx$ は**収束する**といい, その値を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(x)]_{a+\varepsilon}^b = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(a + \varepsilon)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_{a+0}^b = F(b) - F(a+0)$$

と書く。

定積分法

広義積分

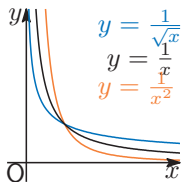
[例題 6.3.5]

$$(1) \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \text{ であるから } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x} \right]_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 1.$$

$$(2) \int \frac{dx}{x} = \log |x| \text{ であるから } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \log b - 0 = \infty.$$

$$(3) \int \frac{dx}{x} = \log |x| \text{ であるから } \int_0^1 \frac{dx}{x} = \left[\log x \right]_{+0}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \log \varepsilon = \infty.$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \text{ であるから } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x} \right]_{+0}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$



定積分法

広義積分

広義積分でも部分積分法・置換積分法が使える

[例 1] $\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$

であるが, $-2x = t$ とおくと $dx = \frac{-dt}{2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow -\infty$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \int_0^{-\infty} e^t \frac{(-dt)}{2} = -\frac{1}{2} [e^t]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$$

としてもよい。

定積分法

広義積分

[例 2]

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx &= \int_0^{\infty} x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' dx \\ &= \left[x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$