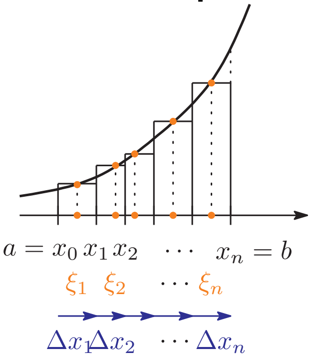
本日やること

1. 積分法
   - 定積分の復習
   - 定積分の部分積分法
   - 定積分の置換積分法

定積分法
復習

[復習：定積分の定義]　$a < b$ のとき



$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$
$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \ k = 1, \cdots, n$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ k = 1, \cdots, n$$
$$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$$

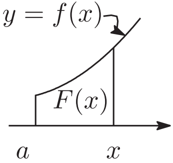
定積分法

復習

[復習：定積分の性質 1. 連続関数の積分可能性]

$f(x)$ が有界な閉区間 $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ 積分可能

[復習：定積分の性質 2. 微分積分学の基本定理]



$f(x)$ ： $[a,b]$ で連続のとき

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{とおくと} \quad \frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

[復習：定積分の性質 3. 定積分と原始関数の関係]

$f(x)$ ： $[a,b]$ で連続
$F(x)$ ： $f(x)$ の原始関数

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \quad \left(\text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く} \right)$$

定積分法

定積分の部分積分

定理：定積分の部分積分法

$f(x),\ g(x)$ ：共に微分可能，　$f'(x),\ g'(x)$: 共に連続であるとき

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[確かめ] 不定積分の部分積分法は

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

移項して

$$\iff \int \bigl(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\bigr)\,dx = f(x)g(x)$$

両辺定積分して

$$\Rightarrow \int_a^b \bigl(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\bigr)\,dx = \Bigl[f(x)g(x)\Bigr]_a^b$$

移項して

$$\iff \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Bigl[f(x)g(x)\Bigr]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[例題 6.3.4]　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$ を計算する.

$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$ したがって

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx = \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の置換積分法

定積分の置換積分法]

$x = \varphi(t)$: $[\alpha, \beta]$ 上で連続微分可能　$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

[確かめ]

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad \text{とおくと} \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

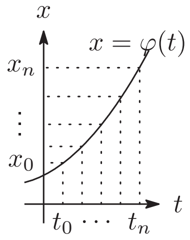
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

で一致する.

定積分法

定積分の置換積分法

[別証明] $x = \varphi(t)$ のグラフは図のようであるとする.



$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$: t の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割

$x_k = \varphi(t_k),\ k = 0, \cdots, n$

ならば

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$: x の区間 $[a, b]$ の分割

となる. さらに

$t_{k-1} \leqq \xi_k \leqq t_k, \quad k = 1, \cdots, n$

をとり $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ とすると $x_{k-1} \leqq \eta_k \leqq x_k$, また

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

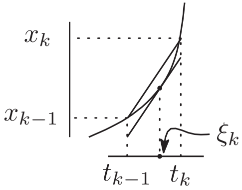
とする。

$$\text{左辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k \qquad \text{右辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

となる。

定積分法

定積分の置換積分法



平均値の定理により

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{dx}{dt}(\xi_k) = \varphi'(\xi_k)$$

となるように ξ_k をとることができるから

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\Delta t_k = \varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

としてよい．したがって

右辺 $=$ 左辺.

定積分法

定積分の置換積分法

[例題] $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ $(a > 0$ は定数$)$ を求める。

$\displaystyle\left(\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right.$ は利用しない。$\Big)$

$x = a\,\sin t$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき $\cos t \geqq 0$ だから

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\,\cos t$$

$\dfrac{dx}{dt} = a\,\cos t$ だから

$$dx = \frac{dx}{dt}\,dt = a\,\cos t\,dt,$$

定積分法

定積分の置換積分法

また

x が 0 から a まで動くとき t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動く

となる．だから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\,dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ だから

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$